Capítulo 7

Integrales impropias

7.1. Definición de integral impropia y primeras propiedades

El concepto de integral se extiende de manera *casi espontánea* a situaciones más generales que las que hemos examinado hasta ahora. Consideremos, por ejemplo, la función no acotada

$$f : (0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(t) = \log t.$$

Puesto que f es continua, para cada $x \in (0,1]$ existe su integral en $[x,1]$, que vale

$$\int_x^1 f = \int_x^1 \log t \, dt = [t \log t - t]_{t=x}^{t=1} = -1 - x \log x + x;$$

y como

$$\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 f = \lim_{x \to 0^+} [-1 - x \log x + x] = -1,$$

parece natural escribir, simplemente,

$$\int_0^1 f = -1.$$

Igualmente, si en el intervalo no acotado $[0,+\infty)$ tomamos la función continua $f(t) = e^{-t}$, para cada $x \in [0,+\infty)$ tenemos

$$\int_0^x f = \int_0^x e^{-t} \, dt = [-e^{-t}]_{t=0}^{t=x} = -e^{-x} + 1,$$
$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f = \lim_{x \to +\infty} \left(-e^{-x} + 1\right) = 1,$$

lo que sugiere escribir

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \, dt = 1.$$

Siguiendo estas ideas podemos definir en distintas situaciones una *integral generalizada* o *integral impropia*, lo que nos llevará a estudiar diferentes tipos de condiciones que permitan asegurar su existencia.

7.1.1. Integrales impropias: definición de integrales impropias convergentes, divergentes, oscilantes

Definición 7.1.1. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es* **localmente integrable en** *A si es integrable en cada intervalo cerrado y acotado contenido en A.*

Por ejemplo, todas las funciones continuas y todas las funciones monótonas, acotadas o no, son localmente integrables.

Obsérvese que si $-\infty < a < b \leq +\infty$, una función f es localmente integrable en $[a,b)$ si y solo si es integrable en cada intervalo $[a,x] \subseteq [a,b)$. Análogamente, si $-\infty \leq a < b < +\infty$, una función f es localmente integrable en $(a,b]$ si y solo si es integrable en cada intervalo $[x,b] \subseteq (a,b]$.

Consideremos en primer lugar funciones definidas en intervalos del tipo $[a,b)$, donde b es finito o $+\infty$.

Definición 7.1.2. *Dada una función $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ localmente integrable, $-\infty < a < b \leq +\infty$, si existe el límite*

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt \tag{7.1}$$

y es finito, decimos que la integral impropia $\int_a^b f$ es **convergente**, *y al valor de dicho límite lo llamamos* **integral impropia** *de f en el intervalo $[a,b)$; se denota por $\int_a^b f$. Si el límite (7.1) existe, pero es $+\infty$ o $-\infty$, decimos que la integral impropia* **diverge** *a $+\infty$ o $-\infty$, y si no existe el límite decimos que la integral impropia no existe, o que no tiene sentido, o que es* **oscilante** *(esta última denominación se reserva en algunos textos para otro concepto distinto).*

Si la integral impropia de una función en un intervalo es convergente se dice que la función es ***integrable en sentido impropio*** en dicho intervalo.

De manera enteramente análoga puede definirse la integral impropia de una función en un intervalo $(a,b]$, $-\infty \leq a < b < +\infty$:

Definición 7.1.3. *Dada una función $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ localmente integrable, $-\infty \leq a < b < +\infty$, decimos que la integral impropia $\int_a^b f$ es* **convergente** *si existe el límite*

$$\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,dt \tag{7.2}$$

y es finito, y al valor de dicho límite lo llamamos **integral impropia** *de f en el intervalo $(a,b]$; se denota por $\int_a^b f$. Si el límite (7.2) existe, pero es $+\infty$ o $-\infty$, decimos que la integral impropia* **diverge** *a $+\infty$ o $-\infty$, y si no existe el límite decimos que la integral impropia no existe, o no tiene sentido, o que es* **oscilante**.

La definición de integral impropia de funciones localmente integrables en intervalos abiertos puede hacerse mediante límites en dos variables o reduciéndola a las definiciones anteriores del siguiente modo:

Definición 7.1.4. *Dada una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ localmente integrable, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, decimos que la integral impropia $\int_a^b f$ es* **convergente** *si existe un $c \in (a,b)$ tal que $\int_a^c f$ y $\int_c^b f$ son ambas convergentes; en ese caso, se define*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Del siguiente resultado (y de su análogo para intervalos semiabiertos por la izquierda) se deduce que en esta definición es indiferente el punto c que se elija. También se deduce que la convergencia de una integral impropia es un concepto local, que depende solo del comportamiento del integrando cerca del punto *impropio*, en un entorno del extremo *conflictivo*.

Proposición 7.1.5. *Sea $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ una función localmente integrable y sea $a<c<b$. La función f es integrable en sentido impropio en $[a,b)$ si y solo si es integrable en sentido impropio en $[c,b)$, en cuyo caso se tiene*

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f. \tag{7.3}$$

Demostración. Basta tener en cuenta que para cada $x\in(c,b)$ es

$$\int_a^x f=\int_a^c f+\int_c^x f.$$

Por tanto, el límite cuando $x\to b^-$ de la primera integral existe si y solo si existe el límite de la tercera integral, y cuando esto suceda, pasando al límite se obtiene la relación (7.3). □

Los conceptos anteriores se extienden al caso de funciones definidas en una unión finita de intervalos disjuntos. Por ejemplo:

Definición 7.1.6. *Sea $J=\cup_{k=1}^n I_k$, donde $(I_k)_{k=1}^n$ es una familia de intervalos disjuntos. Si f es una función localmente integrable en J, se dice que la integral impropia $\int_J f$ es* **convergente** *si converge cada una de las integrales $\int_{a_k}^{b_k} f$, donde a_k y b_k son los extremos de I_k; en ese caso, se define*

$$\int_J f=\sum_{k=1}^n\int_{a_k}^{b_k} f.$$

Nota. Cuando los intervalos (I_k) son contiguos, es decir, cuando $b_1=a_2,\dots,b_{k-1}=a_k,\dots,b_{n-1}=a_n$, suele escibirse $\int_{a_1}^{b_n} f$ en vez de $\int_J f$.

Ejemplos. a) Dado $\alpha\in\mathbb{R}$, las integrales impropias $\displaystyle\int_a^b\frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ y $\displaystyle\int_a^b\frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ son convergentes si $\alpha<1$, y divergen a $+\infty$ si $\alpha\geq 1$.

b) La integral impropia $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ es convergente si $\alpha>1$. Si $\alpha\leq 1$, diverge a $+\infty$.

c) La integral impropia $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\,dt$ es convergente si $\alpha>0$. Si $\alpha\leq 0$, diverge a $+\infty$.

d) La función

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

es localmente integrable en $(-1,1)$ porque es continua. Su integral impropia es convergente:

$$\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-(-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}=\pi$$

(f tiene como primitiva la función arc sen).

Nota. Para más sencillez, solo vamos a considerar por lo general integrales impropias en intervalos del tipo $[a,b)$, donde $-\infty < a < b \leq +\infty$. Dejamos al lector escribir las modificaciones pertinentes para los otros casos.

La noción de integral impropia se reduce a la de integral de Riemann cuando tratamos con funciones integrables-Riemann.

Proposición 7.1.7. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable-Riemann en $[a,b]$. Entonces f es integrable en sentido impropio en $[a,b)$ y su integral impropia es igual a la integral de Riemann.*

Demostración. Según el teorema fundamental del cálculo integral (teorema 6.3.4), la función

$$F(x) = \int_a^x f$$

es continua en b, así que

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f.$$

Esto demuestra que f es integrable en sentido impropio en $[a,b)$ y que su integral impropia es igual a la integral de Riemann. □

La misma idea sirve para demostrar que si una función es continua en $[a,b)$ y en b tiene una discontinuidad evitable, entonces es integrable en sentido impropio en $[a,b)$:

Proposición 7.1.8. *Sea $-\infty < a < b < +\infty$. Si $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ es una función continua y existe el límite $\lim_{x \to b^-} f(x) \in \mathbb{R}$, entonces f es integrable en sentido impropio en $[a,b)$ y*

$$\int_a^b f = \int_a^b g,$$

donde g es la extensión continua de f a $[a,b]$.

Demostración. La función g es integrable Riemann, ya que es continua en $[a,b]$. Según la definición de integral impropia,

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f = \lim_{x \to b^-} \int_a^x g = \int_a^b g,$$

donde en la última igualdad se usa el teorema fundamental del cálculo integral (teorema 6.3.4). □

Observación. Con la misma demostración, se puede probar que si f es una función localmente integrable en $[a,b)$ y se puede extender a una función integrable-Riemann en $[a,b]$, entonces la integral impropia

$$\int_a^b f$$

es convergente.

7.1.2. Primeras propiedades de las integrales impropias

Algunas propiedades de la integral de Riemann se trasladan sin dificultad a las integrales impropias, como muestran las proposiciones siguientes.

Proposición 7.1.9. *Sean f, g funciones integrables en sentido impropio en un intervalo $[a,b)$. Dados λ, $\mu \in \mathbb{R}$, la integral impropia*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)$$

es convergente, y se cumple

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Proposición 7.1.10 (regla de Barrow para integrales impropias). *Sea g una función derivable en $[a,b)$ y tal que g' es localmente integrable en $[a,b)$. La integral impropia $\int_a^b g'$ es convergente si y solo si el límite $\lim_{x\to b^-} g(x)$ existe y es finito. Y si eso ocurre, entonces se verifica*

$$\int_a^b g' = \lim_{x\to b^-} g(x) - g(a).$$

Proposición 7.1.11 (integración por partes en integrales impropias). *Sean u, v funciones derivables en $[a,b)$ y tales que u', v' son localmente integrables en $[a,b)$. Si existen y son reales dos de los límites siguientes:*

$$\lim_{x\to b^-} \int_a^x uv', \quad \lim_{x\to b^-} u(x)v(x), \quad \lim_{x\to b^-} \int_a^x u'v,$$

entonces el otro también existe y es real y se verifica

$$\int_a^b uv' = \lim_{x\to b^-} u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^b u'v.$$

Proposición 7.1.12 (cambio de variable en integrales impropias). *Sean I y J intervalos abiertos, $[a,b) \subseteq J$, $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua, $u : J \to I$ una función derivable tal que existe $\lim_{y\to b^-} u(y) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ y con derivada u' continua. Entonces la integral*

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx$$

converge si y solo si converge la integral

$$\int_{u(a)}^{\ell} f(t)\,dt,$$

en cuyo caso ambas integrales son iguales:

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{\ell} f(t)\,dt.$$

7.2. Convergencia de integrales impropias

7.2.1. Convergencia de integrales impropias con integrando no negativo. Criterios de comparación

En el caso particular de que la función sea no negativa, el estudio de la convergencia de su integral es más sencillo:

Proposición 7.2.1. *Sea f una función localmente integrable y no negativa en $[a,b)$. La integral impropia $\int_a^b f$ es convergente si y solo si la función*

$$F(x) = \int_a^x f, \qquad x \in [a,b)$$

está acotada. En caso contrario, la integral diverge a $+\infty$.

Demostración. Como f es no negativa, la función F es monótona no decreciente. Recordando que

$$\lim_{x\to b^-} F(x) = \sup\{F(x) : x \in [a,b)\},$$

se deduce que el límite es finito si F está acotada (superiormente), mientras que si no está acotada el límite es $+\infty$. □

Una consecuencia importante de este resultado es el siguiente ***criterio de comparación***, que permite reducir el estudio de la convergencia de una integral impropia al de otras conocidas.

Proposición 7.2.2 (criterio de comparación por mayoración). *Sean f, g funciones no negativas localmente integrables en un intervalo $[a,b)$. Supongamos que existen una constante K y algún $c \in [a,b)$ tales que $f(x) \le Kg(x)$ siempre que $c < x < b$. Si la integral impropia $\int_a^b g$ es convergente, entonces también la integral impropia $\int_a^b f$ es convergente.*

Demostración. Para cada $x \in [a,b)$ es

$$\int_a^x f \le \int_a^c f + K\int_c^b g,$$

así que el resultado se deduce de la proposición 7.2.1. □

Proposición 7.2.3 (criterio de comparación por paso al límite). *Sean f, g funciones no negativas localmente integrables en un intervalo $[a,b)$. Supongamos que existe*

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}.$$

a) Si $\ell < +\infty$ y la integral impropia $\int_a^b g$ converge, entonces la integral impropia $\int_a^b f$ también converge.

b) Si $0 < \ell$ y la integral impropia $\int_a^b g$ diverge, entonces la integral impropia $\int_a^b f$ también diverge.

c) Si $0 < \ell < \infty$, las dos integrales $\int_a^b f$ y $\int_a^b g$ tienen el mismo carácter: o las dos son convergentes, o las dos son divergentes.

Demostración. *a)* Si $\ell < \infty$, tomemos $\ell < K < \infty$; existe un c tal que $f(x) < Kg(x)$ si $c < x < b$. Basta entonces aplicar el criterio 7.2.2 de mayoración.

b) Si $0 < \ell$, tomemos $0 < K < \ell$; existe algún c tal que $f(x) > Kg(x)$ si $c < x < b$. Por el criterio 7.2.2 de mayoración, si la integral impropia $\int_a^b g$ diverge necesariamente la integral impropia $\int_a^b f$ debe divergir.

c) Es una consecuencia inmediata de *a)* y *b)*. □

Nótese que si, en particular, es $f(x) \sim g(x)$ cuando $x \to b^-$, entonces $\int_a^b f$ y $\int_a^b g$ tienen el mismo carácter.

Examinando los ejemplos que hemos visto de convergencia y divergencia, del criterio 7.2.3 se deduce:

Corolario 7.2.4 (criterio de Pringsheim). *a) Sea f una función no negativa, localmente integrable en un intervalo $[a,+\infty)$ y tal que para algún α existe el límite*

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = \ell \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}.$$

Entonces:

- *si $\alpha \leq 1$ y $\ell > 0$, la integral $\int_a^{+\infty} f$ diverge (a $+\infty$).*
- *si $\alpha > 1$ y $\ell \neq +\infty$, la integral $\int_a^{+\infty} f$ converge.*

b) Sea f una función no negativa, localmente integrable en un intervalo $[a,b)$, con $-\infty < a < b < +\infty$, y tal que para algún α existe el límite

$$\lim_{x\to b^-} (b-x)^\alpha f(x) = \ell \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}.$$

Entonces:

- *si $\alpha \geq 1$ y $\ell > 0$, la integral $\int_a^b f$ diverge (a $+\infty$).*
- *si $\alpha < 1$ y $\ell \neq +\infty$, la integral $\int_a^b f$ converge.*

7.2.2. Integrales impropias de integrando cualquiera: convergencia absoluta y convergencia condicional. Criterios de Abel y Dirichlet

Definición 7.2.5. *Sea f una función localmente integrable en $[a,b)$. Decimos que la integral impropia de f en $[a,b)$ es* **absolutamente convergente** *si la integral impropia*

$$\int_a^b |f(t)|\,dt$$

es convergente.

Proposición 7.2.6. *Toda integral impropia absolutamente convergente es convergente.*

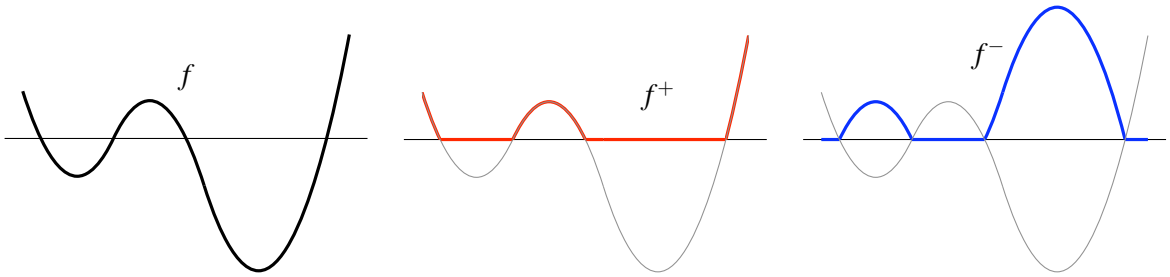
Demostración. Sea $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ localmente integrable y supongamos que la integral impropia $\int_a^b |f|$ es convergente. Definamos

$$f_+(x) = \text{máx}\{f(x),0\},$$
$$f_-(x) = \text{máx}\{-f(x),0\}.$$

Las funciones f_+ y f_- son localmente integrables y es fácil comprobar que

$$0 \le f_+ \le |f|, \qquad 0 \le f_- \le |f|,$$

así que las integrales impropias $\int_a^b f_+$ y $\int_a^b f_-$ son convergentes. También es fácil comprobar que $f = f_+ - f_-$, luego la integral $\int_a^b f$ es convergente. □



Las funciones f, f^+ y f^-

Como la convergencia absoluta de una integral impropia es la convergencia de la integral de una función no negativa, la proposición 7.2.6 permite aprovechar en muchos casos los métodos de comparación de integrandos no negativos. Por ejemplo:

a) la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ es convergente, porque es absolutamente convergente ($0 \le \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ y la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge);

b) la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ es convergente, puesto que integrando por partes

$$\int_1^y \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = -\left[\frac{\cos x}{x}\right]_1^y - \int_1^y \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

y el segundo miembro de esta igualdad tiene límite finito para $y \to +\infty$, como consecuencia de *a)*.

Sin embargo, hay integrales impropias convergentes que no son absolutamente convergentes. El ejemplo estándar es precisamente la integral $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$, como vemos a continuación.

Ejemplo. La integral $\int_0^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx$ no es convergente. En efecto: para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx \ge \frac{1}{n\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx = \frac{2}{n\pi} \ge \frac{2}{\pi}\int_n^{n+1} \frac{dx}{x}.$$

Luego

$$\int_0^{N\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx \ge \frac{2}{\pi}\int_1^{N+1} \frac{dx}{x} = \frac{2}{\pi}\log(N+1) \to +\infty.$$

Definición 7.2.7. *Si una integral impropia es convergente pero no es absolutamente convergente, se dice que es* **condicionalmente convergente.**

Como hay integrales impropias condicionalmente convergentes, es importante disponer de criterios de convergencia que no dependan de la convergencia absoluta; de ellos, los que más se usan en la práctica son los criterios de Abel y Dirichlet.

Proposición 7.2.8 (criterio de Abel). *Sea f una función integrable en sentido impropio en un intervalo $[a,b)$ y g una función monótona y acotada en dicho intervalo. Entonces la integral $\int_a^b fg$ es convergente.*

Proposición 7.2.9 (criterio de Dirichlet). *Sea f una función localmente integrable en un intervalo $[a,b)$ y tal que $\sup_{a<x<b}\left|\int_a^x f\right|$ es finito y sea g una función monótona en $[a,b)$ con $\lim_{x\to b^-} g(x)=0$. Entonces la integral $\int_a^b fg$ es convergente.*

7.3. Ejercicios

Ejercicio 7.1. Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x(1-x^2)|}}.$$

Ejercicio 7.2. Determinar el carácter de las siguientes integrales impropias:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{|x-1|}$ d) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x\log x}$ f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x}\,dx$ g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+3}}$ h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x^3-4x^2+4x)^{1/3}}$

i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$ j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ k) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+1}$ l) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^5)^{1/6}}$

m) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$ n) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x^2-1)^2}$ ñ $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$ o) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x(3-x))^{1/3}}$

p) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2e^{-x}}{1+x^2}\,dx$ q) $\displaystyle\int_2^{+\infty} e^{-x^3}\,dx$ r) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx$ s) $\displaystyle\int_0^1 (\log x)\operatorname{sen}\frac{1}{x}\,dx$

t) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\log x}$

Ejercicio 7.3. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales y, si convergen, calcular su valor:

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$ b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^1 x|\log x|\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$ f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx$ g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ h) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$

i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^x}\,dx$ j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} |x-3|e^{-x}\,dx$ k) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{|x-2|}\,dx$ l) $\displaystyle\int_1^3 |x-2|\log x\,dx$

m) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

Ejercicio 7.4 (funciones gamma y beta de Euler). Probar que dados $t,u,v \in (0,+\infty)$, las siguientes integrales son convergentes:

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x}\, dx,$$
$$B(u,v) = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}\, dx.$$

Ejercicio 7.5. a) Probar que $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$, para todo $t > 0$.

b) Probar que $\Gamma(n+1) = n!$ para todo entero $n \geq 0$.

Ejercicio 7.6. Teniendo en cuenta la función Γ y sabiendo que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, calcular estas integrales:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} 3^{-4x^2}\, dx$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x-1|}\, dx$ d) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \log^4 x\, dx$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\, dx$ f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (x-3) e^{-x^2}\, dx$ g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (x^2+1) e^{-\sqrt{x}}\, dx$