

## Capítulo 6

# La integral de Riemann

Vamos a dar una definición precisa de la integral de una función definida en un intervalo. Este tiene que ser un intervalo cerrado y acotado, es decir  $[a, b]$  con  $a < b \in \mathbb{R}$ , y la definición que daremos de integral solo se aplica a funciones acotadas, y no a todas, sino a las funciones que llamaremos integrables.

En el siguiente capítulo veremos cómo, en un sentido más amplio, podemos hablar de integrales de funciones no acotadas o definidas en intervalos no acotados.

Seguimos básicamente el desarrollo que puede verse, entre otros muchos textos, en [ROSS, cap. VI, pág. 184 y sigs.] o en [BARTLE-SHERBERT, cap. 6, pág. 251 y sigs.]. Como complemento puede consultarse [GUZMÁN, cap. 12]. La evolución histórica de la integral está muy bien contada (sobre todo la aportación de Newton y Leibniz) en [DURÁN]; de carácter más técnico es el libro [GRATTAN-GUINNESS].

### 6.1. Definición (de Darboux) de la integral de Riemann

#### 6.1.1. Definición de integral

**Definición 6.1.1.** Una **partición** de un intervalo  $[a, b]$  es un conjunto finito de puntos de  $[a, b]$  que incluye a los extremos. Una partición  $P$  la representamos ordenando sus puntos de menor a mayor, comenzando en  $a$  y terminando en  $b$ :

$$P = \{x_i\}_{i=0}^n \equiv \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}.$$

El conjunto de las particiones de  $[a, b]$  lo indicamos con  $\mathcal{P}([a, b])$ . Una partición como la indicada divide el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ , cada uno de longitud  $x_i - x_{i-1}$ .

**Definición 6.1.2 (sumas de Darboux).** Sea  $f$  una función acotada definida en  $[a, b]$ , y sea  $P \in \mathcal{P}([a, b])$ ,  $P \equiv \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ . Sean, para cada  $i = 1, \dots, n$ ,

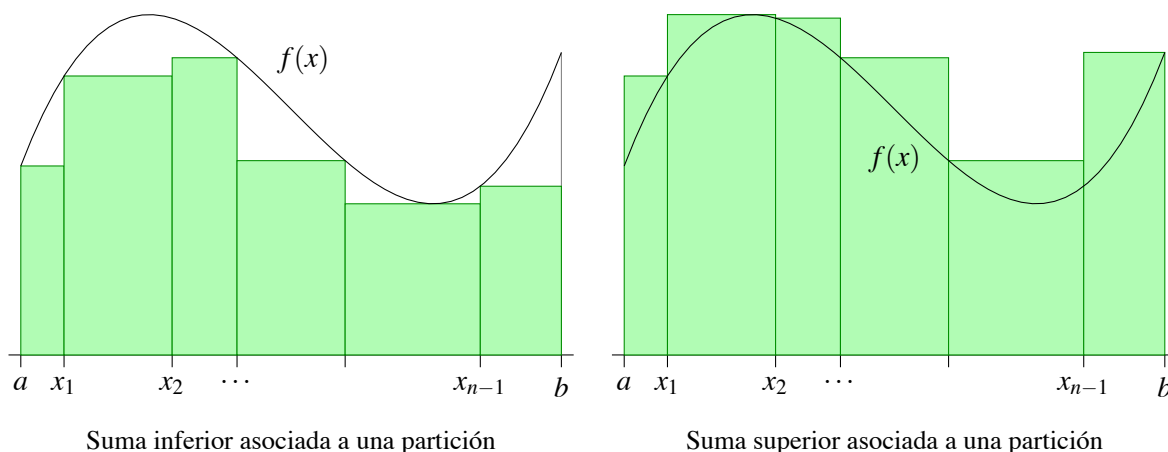
$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}; \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

La **suma inferior de  $f$  asociada a  $P$**  se define como

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}),$$

y la **suma superior de  $f$  asociada a  $P$**  es

$$\bar{S}(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).$$

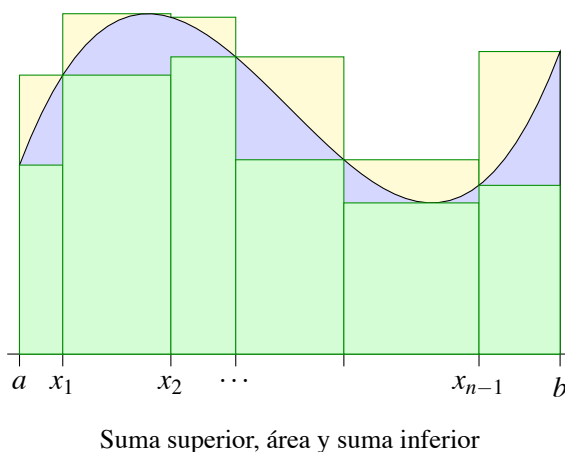


**Observación.** Para cualquier  $P \in \mathcal{P}([a, b])$  tenemos que  $\underline{\mathbf{S}}(f, P) \leq \overline{\mathbf{S}}(f, P)$ , ya que  $m_i \leq M_i$  para cada  $i$ . También, poniendo  $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ ,  $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ , se deduce que  $m(b-a) \leq \underline{\mathbf{S}}(f, P) \leq \overline{\mathbf{S}}(f, P) \leq M(b-a)$  cualquiera que sea la partición  $P$  (y por consiguiente, tanto el conjunto de las sumas superiores como el de las sumas inferiores están acotados, superiormente por  $M(b-a)$ , inferiormente por  $m(b-a)$ ).

**Nota (relación entre la integral y la medida de áreas).** Supongamos que  $f$  es una función no negativa y consideremos la región que delimita su gráfica con las rectas  $y = 0$ ,  $x = a$  y  $x = b$ . Si el área de dicha región es  $A$ , entonces

$$\underline{\mathbf{S}}(f, P) \leq A \leq \overline{\mathbf{S}}(f, P),$$

ya que las respectivas sumas son las áreas que obtenemos si cambiamos  $f$  en cada  $[x_{i-1}, x_i]$  por  $m_i$  o  $M_i$ , y los hemos definido de forma que  $m_i \leq f \leq M_i$  (de hecho hemos tomado los valores más ajustados que cumplen dichas desigualdades).



En la figura, se representan en distinto color la diferencia entre la suma superior y el área  $A$  y la diferencia entre  $A$  y la suma inferior. Parece claro que si tomamos una partición suficientemente nutrida de puntos podemos conseguir que estas zonas sean muy pequeñas, de forma que tanto la suma superior como la inferior sean arbitrariamente próximas al área  $A$ .

**Definición 6.1.3.** Dada  $f$  acotada en  $[a, b]$ , se define su **integral inferior** en  $[a, b]$  como

$$\int_a^b f = \sup\{\underline{\mathbf{S}}(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\},$$

y su **integral superior** en  $[a, b]$  como

$$\int_a^b f = \inf\{\overline{\mathbf{S}}(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}.$$

Notemos que, como consecuencia de la observación previa, la integral inferior y la superior son valores reales perfectamente definidos para cualquier función acotada en un intervalo cerrado y acotado. No es difícil adivinar que la integral inferior es siempre menor o igual que la superior, pero la demostración de este hecho es menos trivial de lo que parece a simple vista. Para probarlo, necesitamos un estudio más detallado de las sumas de Darboux, que posponemos al apartado siguiente.

**Definición 6.1.4.** Una función  $f$  acotada en  $[a, b]$  es **integrable-Riemann** en  $[a, b]$  (en el sentido de Darboux), o simplemente **integrable**, si se cumple que

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b f}.$$

En tal caso, al valor común de dichas integrales se le llama la **integral (de Riemann) de  $f$**  en  $[a, b]$ , y se escribe  $\int_a^b f$ .

A veces es cómodo escribir la integral como  $\int_a^b f(x)dx$ , expresando la función mediante su valor  $f(x)$  en la variable  $x$ . En tal caso, es indiferente la letra empleada: el mismo significado tiene  $\int_a^b f(y)dy$ ,  $\int_a^b f(z)dz$ ,  $\int_a^b f(t)dt$ , etc.; todos estos símbolos representan la integral de la función  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ .

**Ejemplo (integral de una función constante).** Si  $f(x) = c$  para todo  $x \in [a, b]$  y  $P$  es la partición trivial  $\{a, b\}$  resulta que  $\underline{\mathbf{S}}(f, P) = c(b - a) = \overline{\mathbf{S}}(f, P)$ . Se comprueba fácilmente que lo mismo sucede para cualquier otra partición, así que la integral superior y la inferior coinciden con  $c(b - a)$ . Es decir,

$$\int_a^b c dx = c(b - a).$$

**Ejemplo (integral de la función identidad).** Si  $f(x) = x$  para todo  $x \in [a, b]$ , su integral superior y su inferior coinciden con  $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ . Es decir,

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

La comprobación de este resultado a partir de la definición de integral requiere más esfuerzo del que cabe suponer (véanse en [BARTLE-SHERBERT, págs. 257–258] los cálculos para  $a = 0$ ,  $b = 1$ ).

**Ejemplo (integral de la función cuadrado).** Si  $f(x) = x^2$  para todo  $x \in [a, b]$ , su integral superior y su inferior coinciden con  $\frac{1}{3}(b^3 - a^3)$ . Es decir,

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

La obtención de esta fórmula es sorprendentemente complicada. Los detalles del cálculo pueden verse en [ROSS, pág. 186] o [BARTLE-SHERBERT, pág. 258].

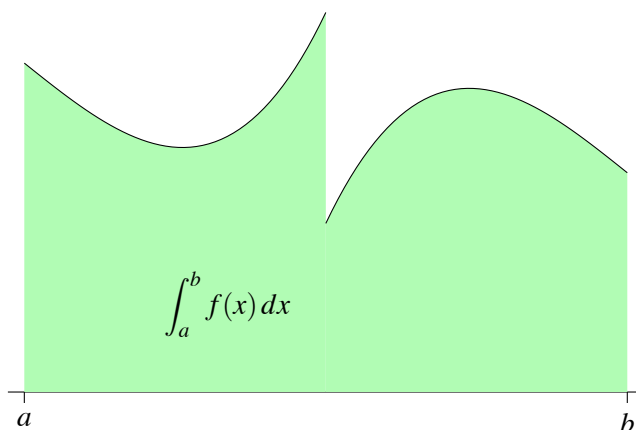
Este ejemplo y el anterior ponen de manifiesto la necesidad de hallar procedimientos indirectos de cálculo que permitan evaluar cómodamente al menos integrales de funciones tan sencillas como estas. Veremos algunos más adelante.

**Ejemplo (una función acotada que no es integrable).** Sea  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la dada por  $f(x) = 1$  si  $x \in \mathbb{Q}$  y  $f(x) = 0$  si  $x \notin \mathbb{Q}$  (la función de Dirichlet). Por la densidad de los racionales y de los irracionales, en cualquier intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , asociado a cualquier partición  $P$ ,  $f$  toma los valores 0 y 1, luego resulta que  $\overline{\mathbf{S}}(f, P) = 1$  y  $\underline{\mathbf{S}}(f, P) = 0$ . Por lo tanto la integral inferior vale 0 y la integral superior vale 1. La función de Dirichlet no es integrable-Riemann.

**Nota (¿la integral es el área?).** Dada una función  $f$  acotada y no negativa, ya hemos visto que  $\underline{\mathbf{S}}(f, P) \leq A \leq \overline{\mathbf{S}}(f, P)$  para cada partición  $P$ , si  $A$  es el área de la región que limita la gráfica de  $f$ . Por tanto  $A$  es una cota superior del conjunto de las sumas inferiores y una cota inferior del conjunto de las sumas superiores, y entonces

$$\int_a^b f \leq A \leq \overline{\int_a^b f}. \quad (6.1)$$

Si  $f$  es integrable, los dos extremos de (6.1) coinciden con  $\int_a^b f$ , así que el área  $A$  es igual a la integral. Pero hay que señalar un matiz importante: mientras que la integral es un concepto que hemos definido



La integral y el área

rigurosamente, nos hemos valido de una noción intuitiva e *ingenua* de la medida de áreas.

### 6.1.2. Propiedades básicas de las sumas de Darboux

**Lema 6.1.5.** Sea  $f$  una función acotada en un intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ . Si  $P$  y  $Q$  son particiones de  $[a, b]$  y  $P \subseteq Q$  (se dice en tal caso que  $Q$  es **más fina que**  $P$ ), entonces

$$\underline{\mathbf{S}}(f, P) \leq \underline{\mathbf{S}}(f, Q) \leq \overline{\mathbf{S}}(f, Q) \leq \overline{\mathbf{S}}(f, P),$$

y en consecuencia

$$\overline{\mathbf{S}}(f, Q) - \underline{\mathbf{S}}(f, Q) \leq \overline{\mathbf{S}}(f, P) - \underline{\mathbf{S}}(f, P).$$

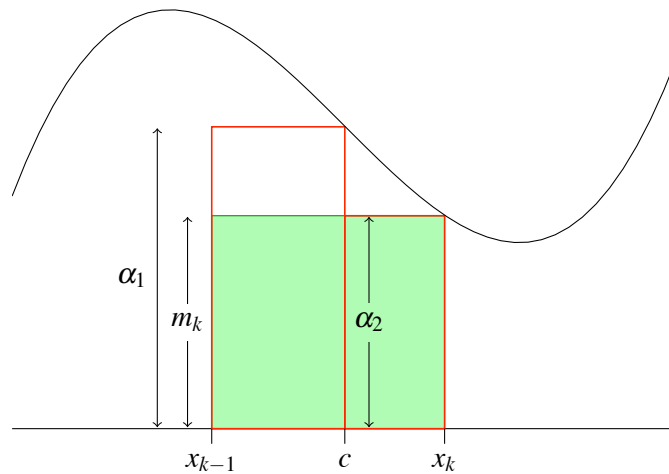
*Demostración.* Basta probarlo en el caso en que  $Q$  tiene un elemento más que  $P$ ; para el caso general basta reiterar el razonamiento, añadiendo en cada paso un punto nuevo hasta obtener  $Q$ . Ponemos entonces  $Q = P \cup \{c\}$ , con  $P \equiv \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  y  $Q \equiv a = x_0 < \dots < x_{k-1} < c < x_k < \dots < x_n = b$ . Se trata de probar que  $\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, Q)$  y  $\overline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, P)$ .

Sean  $m_i$  los ínfimos correspondientes a la partición  $P$  y sean

$$\alpha_1 = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, c]\},$$

$$\alpha_2 = \inf\{f(x) : x \in [c, x_k]\}$$

(ver la figura). Entonces,  $m_k \leq \alpha_1$ ,  $m_k \leq \alpha_2$ . Por lo tanto,



Diferencia entre las sumas inferiores correspondientes a  $P$  y  $Q$

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, Q) - \underline{S}(f, P) &= \alpha_1(c - x_{k-1}) + \alpha_2(x_k - c) - m_k(x_k - x_{k-1}) \\ &\geq m_k(c - x_{k-1} + x_k - c) - m_k(x_k - x_{k-1}) = 0. \end{aligned}$$

Análogamente, sean  $M_i$  los supremos correspondientes a  $P$  y sean  $\beta_1 = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, c]\}$  y  $\beta_2 = \sup\{f(x) : x \in [c, x_k]\}$ . Entonces,  $M_k \geq \beta_1$ ,  $M_k \geq \beta_2$  y

$$\overline{S}(f, Q) - \overline{S}(f, P) = \beta_1(c - x_{k-1}) + \beta_2(x_k - c) - M_k(x_k - x_{k-1}) \leq 0. \quad \square$$

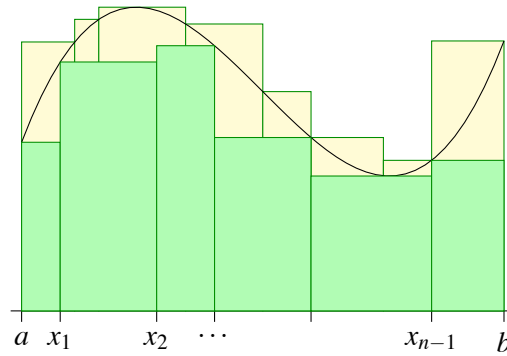
**Lema 6.1.6.** Sea  $f$  una función acotada en un intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ . Si  $P$  y  $Q$  son particiones cualesquiera de  $[a, b]$ , entonces

$$\underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, Q).$$

*Demostración.* Por el lema 6.1.5, si tomamos  $P \cup Q \in \mathcal{P}([a, b])$  entonces

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, P \cup Q) \leq \overline{S}(f, P \cup Q) \leq \overline{S}(f, Q);$$

la primera desigualdad se da porque  $P \subseteq P \cup Q$ , y la tercera porque  $Q \subseteq P \cup Q$ . □



Suma inferior y suma superior para particiones distintas

**Teorema 6.1.7.** Si  $f$  es una función acotada en  $[a, b]$ , entonces su integral inferior es siempre menor o igual que su integral superior:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

*Demostración.* Según el lema 6.1.6, si  $Q$  es una partición cualquiera de  $[a, b]$ ,

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\underline{\mathbf{S}}(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\} \leq \overline{\mathbf{S}}(f, Q).$$

Por lo tanto,

$$\underline{\int_a^b} f \leq \inf\{\overline{\mathbf{S}}(f, Q) : Q \in \mathcal{P}([a, b])\} = \overline{\int_a^b} f. \quad \square$$

### 6.1.3. Existencia de la integral: condición de Riemann. Integribilidad de las funciones monótonas y de las funciones continuas

«Al abordar la integral de Riemann uno se enfrenta a dos cuestiones. Primero, para una función acotada en un intervalo, se encuentra la cuestión de la existencia de la integral. Segundo, cuando se sabe que existe la integral, surge entonces el problema de evaluarla» ([BARTLE-SHERBERT, pág. 259]).

Para ver si una función es integrable, ¿es preciso considerar todas las sumas de Darboux y calcular la integral superior e inferior? Por suerte, en el siguiente teorema vamos a demostrar que no es necesario: basta probar que hay particiones cuyas sumas de Darboux están suficientemente próximas. Este resultado servirá además para deducir que las funciones continuas y las monótonas son integrables.

**Teorema 6.1.8 (condición de integrabilidad de Riemann).** Una función  $f$  acotada en  $[a, b]$  es integrable en dicho intervalo si y solo si para cada  $\varepsilon > 0$  existe una partición  $P = P_\varepsilon$  de  $[a, b]$  tal que

$$\overline{\mathbf{S}}(f, P) - \underline{\mathbf{S}}(f, P) < \varepsilon.$$

*Demostración.* Supongamos primero que  $f$  es integrable. Como  $\int_a^b f$  es el supremo de las sumas inferiores y el ínfimo de las sumas superiores, para  $\varepsilon > 0$  resulta que ni  $\int_a^b f - \varepsilon/2$  es cota superior

de las primeras ni  $\int_a^b f + \varepsilon/2$  es cota inferior de las segundas, así que existen dos particiones  $P_1$  y  $P_2$  tales que

$$\int_a^b f - \varepsilon/2 < \underline{\mathbf{S}}(f, P_1), \quad \overline{\mathbf{S}}(f, P_2) < \int_a^b f + \varepsilon/2.$$

Si  $P = P_1 \cup P_2$  entonces  $\underline{\mathbf{S}}(f, P_1) \leq \underline{\mathbf{S}}(f, P)$  y  $\overline{\mathbf{S}}(f, P) \leq \overline{\mathbf{S}}(f, P_2)$ , luego

$$\int_a^b f - \varepsilon/2 < \underline{\mathbf{S}}(f, P), \quad \overline{\mathbf{S}}(f, P) < \int_a^b f + \varepsilon/2$$

y por tanto  $\overline{\mathbf{S}}(f, P) - \underline{\mathbf{S}}(f, P) < \varepsilon$ .

Recíprocamente, si esto así para alguna  $P$  entonces

$$\int_a^b f \leq \overline{\mathbf{S}}(f, P) < \underline{\mathbf{S}}(f, P) + \varepsilon \leq \int_a^b f + \varepsilon,$$

luego  $0 \leq \overline{\int_a^b f} - \underline{\int_a^b f} < \varepsilon$ , y si esto es así para todo  $\varepsilon > 0$  entonces  $\overline{\int_a^b f} - \underline{\int_a^b f} = 0$ .  $\square$

**Definición 6.1.9.** Dada una partición  $P \in \mathcal{P}([a, b])$ , su **norma**  $\|P\|$  es el máximo de  $\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, n\}$ .

La norma de una partición es la mayor distancia entre dos puntos consecutivos de la misma. Gráficamente, se trata de la anchura máxima de los intervalos parciales  $[x_{i-1}, x_i]$ ; controla la *holgura* de la partición, de modo que cuanto menor sea, más tupida es la partición, sus puntos están más próximos.

**Observación.** Podemos tomar particiones de norma arbitrariamente pequeña: para conseguir que la norma sea menor que un  $\delta > 0$  prefijado, basta elegir un  $n$  tal que  $h = \frac{b-a}{n} < \delta$  y tomar

$$P = \{a, a + h, a + 2h, a + 3h, \dots, a + nh = b\}.$$

**Teorema 6.1.10 (integrabilidad de las funciones monótonas).** Toda función monótona en un intervalo  $[a, b]$  es integrable.

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es una función no decreciente en  $[a, b]$ . Entonces  $f$  está acotada (inferiormente por  $f(a)$ , superiormente por  $f(b)$ ).

Dada  $P \equiv \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ , la monotonía dice que, para cada  $i$ ,

$$M_i \equiv \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_i);$$

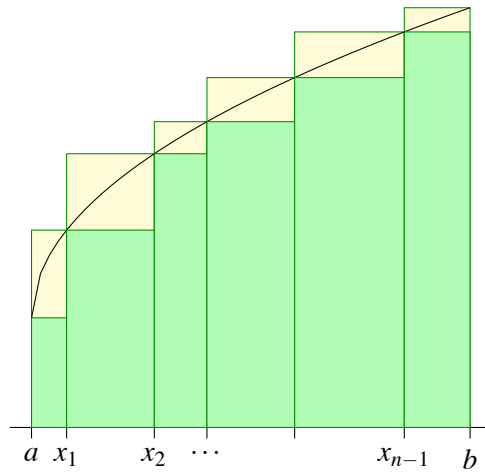
$$m_i \equiv \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_{i-1}).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{S}}(f, P) - \underline{\mathbf{S}}(f, P) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \\ &< \|P\| \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \|P\|(f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Ahora, dado  $\varepsilon > 0$  basta tomar una partición  $P$  de modo que  $\|P\|(f(b) - f(a)) < \varepsilon$  para probar que se cumple la condición de integrabilidad de Riemann (teorema 6.1.8).

Si  $f$  es no creciente la demostración es análoga.  $\square$



Suma superior y suma inferior para una función monótona

Notemos que la idea esencial de la demostración es que, gracias a la monotonía de  $f$ , en cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  podemos controlar la oscilación de sus valores (el tamaño de  $M_i - m_i$ ) a través del tamaño de la norma de la partición. Esta misma idea es adaptable al caso de que  $f$  sea continua, debido a que  $f$  es entonces uniformemente continua.

**Teorema 6.1.11 (integrabilidad de las funciones continuas).** *Toda función continua en un intervalo  $[a, b]$  es integrable.*

*Demostración.* Sea  $f$  continua en  $[a, b]$ . Notemos que  $f$  es acotada por ser continua en el intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ , así que tiene sentido considerar su integrabilidad. Además, el teorema 4.2.18 de Heine dice que es uniformemente continua en  $[a, b]$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe por tanto un valor  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$  para cualesquiera  $x, y \in [a, b]$  tales que  $|x - y| < \delta$ .

Sea  $P$  una partición tal que  $\|P\| < \delta$ ,  $P \equiv \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ . Si  $M_i$  y  $m_i$  son los correspondientes supremos e ínfimos en cada  $[x_{i-1}, x_i]$ , por el teorema 4.2.8 de Weierstrass podemos elegir  $r_i, s_i$  en dicho intervalo con  $M_i = f(r_i)$  y  $m_i = f(s_i)$ . Entonces  $|r_i - s_i| \leq x_i - x_{i-1} < \delta$ , así que  $f(r_i) - f(s_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}$ , y

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}(f, P) - \underline{\mathbf{S}}(f, P) &= \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (f(r_i) - f(s_i))(x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por la condición de integrabilidad de Riemann (teorema 6.1.8),  $f$  es integrable.  $\square$

Pero hay funciones integrables que no son monótonas ni continuas. El siguiente resultado proporciona ejemplos sencillos.

**Proposición 6.1.12.** *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Si  $f$  es integrable en cada intervalo  $[c, b]$ , con  $a < c < b$ , entonces es integrable en  $[a, b]$ .*



*Demostración.* Sea  $B > 0$  una cota de  $|f|$  en  $[a, b]$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , tomemos  $c \in (a, b)$  de manera que  $c - a < \frac{\varepsilon}{4B}$ . Como  $f$  es integrable en  $[c, b]$ , en virtud de la condición de Riemann se puede encontrar una partición  $P_c^b$  del intervalo  $[c, b]$  tal que  $\overline{\mathbf{S}}(f, P_c^b) - \underline{\mathbf{S}}(f, P_c^b) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Añadiendo el punto  $a$  a la partición  $P_c^b$ , obtenemos una partición  $P$  de  $[a, b]$  para la que

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{S}}(f, P) - \underline{\mathbf{S}}(f, P) &= \sup f([a, c]) \cdot (c - a) + \overline{\mathbf{S}}(f, P_c^b) - \inf f([a, c]) \cdot (c - a) - \underline{\mathbf{S}}(f, P_c^b) \\ &\leq B \cdot (c - a) + \overline{\mathbf{S}}(f, P_c^b) + B \cdot (c - a) - \underline{\mathbf{S}}(f, P_c^b) \\ &< 2B \cdot (c - a) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

y en consecuencia  $f$  es integrable en  $[a, b]$ . □

**Ejemplo.** La función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante  $f(0) = 1$  y

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad \text{si } 0 < x \leq 1$$

es integrable-Riemann en  $[0, 1]$ . En efecto, claramente está acotada y además es integrable en cada intervalo  $[c, 1]$ , con  $0 < c < 1$ , porque es continua en  $[c, 1]$ .

Este es un ejemplo interesante de una función integrable que no es continua ni monótona.

### Comentario: discontinuidades de las funciones integrables-Riemann (condición de integrabilidad de Lebesgue)

Las funciones continuas son integrables, aunque no todas las funciones integrables son continuas: valen de ejemplo las funciones monótonas con discontinuidades. Pero las funciones integrables no pueden tener *demasiadas* discontinuidades, según demostró Lebesgue. Concretamente:

**Teorema 6.1.13 (condición de integrabilidad de Lebesgue).** *Una función  $f$  acotada en  $[a, b]$  es integrable si y solo si para cada  $\varepsilon > 0$  se puede encontrar una sucesión  $(J_n)$  de intervalos tal que:*

a)  $\lim_n \sum_{k=1}^n |J_k| < \varepsilon$ , donde  $|J_k|$  es la longitud del intervalo  $J_k$ ;

b) el conjunto de puntos de  $[a, b]$  en los que  $f$  es discontinua está contenido en  $\cup_n J_n$ .

Cuando se conozca la *medida de Lebesgue*, se verá que esto significa que el conjunto de puntos de discontinuidad de  $f$  es *de medida nula*. Los conjuntos finitos quedan dentro de esta categoría; también los conjuntos numerables, es decir, los conjuntos infinitos que pueden escribirse en forma de sucesión, como  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  o  $\mathbb{Q}$ .

### 6.1.4. Sumas de Riemann. Definición de integrabilidad de Riemann: comparación con la de Darboux

El control de las oscilaciones de  $f$  a través de la norma de la partición que hemos visto para funciones monótonas o continuas puede llevarse a cabo para cualquier función integrable:

**Teorema 6.1.14.** *Una función  $f$  acotada en  $[a, b]$  es integrable si y solo si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que toda partición  $P$  de  $[a, b]$  con norma  $\|P\| < \delta$  cumple que*

$$\overline{\mathbf{S}}(f, P) - \underline{\mathbf{S}}(f, P) < \varepsilon.$$

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es integrable. Fijado  $\varepsilon > 0$ , sea  $P_0 \in \mathcal{P}([a, b])$  tal que

$$\bar{\mathbf{S}}(f, P_0) - \underline{\mathbf{S}}(f, P_0) < \frac{\varepsilon}{2},$$

pongamos que  $P_0$  tiene  $n$  puntos y sea  $K > 0$  tal que  $|f(x)| \leq K$  para todo  $x \in [a, b]$ .

Sea  $P$  una partición de  $[a, b]$ ,

$$P \equiv \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b\}.$$

y tomemos  $Q = P_0 \cup P$ . Como máximo,  $Q$  tiene  $n-2$  puntos más que  $P$ , los de  $P_0 \setminus \{a, b\}$ . Supongamos que fuese  $Q = P \cup \{c\}$ , con  $t_{j-1} < c < t_j$ . Entonces sería

$$\bar{\mathbf{S}}(f, P) - \bar{\mathbf{S}}(f, Q) = M_j(t_j - t_{j-1}) - \alpha_1(c - t_{j-1}) - \alpha_2(t_j - c)$$

donde  $M_j$ ,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son los supremos de los valores de  $f$  en  $[t_{j-1}, t_j]$ ,  $[t_{j-1}, c]$  y  $[c, t_j]$  respectivamente. Como  $|M_j| \leq K$ ,  $|\alpha_1| \leq K$ ,  $|\alpha_2| \leq K$  y  $0 < t_j - t_{j-1} \leq \|P\|$ , deducimos que

$$\bar{\mathbf{S}}(f, P) - \bar{\mathbf{S}}(f, Q) \leq K(t_j - t_{j-1}) + K(c - t_{j-1}) + K(t_j - c) \leq 2K\|P\|.$$

Reiterando lo anterior (añadiendo cada vez un punto hasta obtener  $Q$ ) es fácil ver que en general tenemos

$$\bar{\mathbf{S}}(f, P) - \bar{\mathbf{S}}(f, Q) \leq 2(n-2)K\|P\| < 2nK\|P\|,$$

y análogamente se ve que

$$\underline{\mathbf{S}}(f, Q) - \underline{\mathbf{S}}(f, P) < 2nK\|P\|.$$

También tenemos que  $\bar{\mathbf{S}}(f, Q) - \underline{\mathbf{S}}(f, Q) < \varepsilon/2$ , porque  $Q$  es más fina que  $P_0$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}(f, P) &< \bar{\mathbf{S}}(f, Q) + 2nK\|P\| \\ &< \underline{\mathbf{S}}(f, Q) + \varepsilon/2 + 2nK\|P\| \\ &< \underline{\mathbf{S}}(f, P) + \varepsilon/2 + 4nK\|P\|. \end{aligned}$$

Ahora basta tomar  $\delta = \frac{\varepsilon}{8nK}$  y si  $\|P\| < \delta$ , entonces  $\bar{\mathbf{S}}(f, P) - \underline{\mathbf{S}}(f, P) < \varepsilon$ .

El recíproco es consecuencia directa de la condición de integrabilidad de Riemann (teorema 6.1.8).  $\square$

**Definición 6.1.15.** Dada una partición  $P \equiv \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  y una función  $f$  definida en  $[a, b]$ , para cada elección de valores  $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$  se dice que

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^n f(s_i)(x_i - x_{i-1})$$

es una **suma de Riemann** de  $f$  asociada a  $P$ .

Provisionalmente, decimos que  $f$  es  $\mathfrak{R}$ -integrable o integrable según la definición de Riemann en  $[a, b]$  si existe un número real  $R$  tal que, dado  $\varepsilon > 0$  arbitrario, se puede encontrar un  $\delta > 0$  de manera que

$$|\mathcal{S} - R| < \varepsilon$$

para cualquier suma de Riemann  $\mathcal{S}$  de  $f$  asociada a una partición  $P$  de norma  $\|P\| < \delta$ . Cuando esto suceda, decimos que  $R$  es la  $\mathfrak{R}$ -integral de  $f$  en  $[a, b]$ , y ponemos (provisionalmente)  $R \stackrel{\mathfrak{R}}{=} \int_a^b f$ .

**Observación.** Dado que  $m_i \leq f(s_i) \leq M_i$  para cada  $i$ , cualquier suma de Riemann asociada a  $P$  de una función acotada  $f$  cumple que

$$\underline{\mathbf{S}}(f, P) \leq \mathcal{S} \leq \overline{\mathbf{S}}(f, P).$$

El resultado siguiente prueba que la integral según la definición de Darboux y la integral según la definición de Riemann son iguales.

**Teorema 6.1.16.** *Una función acotada en un intervalo  $[a, b]$  es integrable según la definición 6.1.15 de Riemann si y solo si es integrable según la definición 6.1.4 de Darboux, y en ese caso las dos integrales coinciden.*

*Demostración.* Sea  $f$  integrable con la definición de Darboux y sea  $\varepsilon > 0$ . Por el teorema 6.1.14, existe  $\delta$  tal que  $\overline{\mathbf{S}}(f, P) - \underline{\mathbf{S}}(f, P) < \varepsilon$  siempre que  $\|P\| < \delta$ ; si  $\mathcal{S}$  es una suma de Riemann asociada a  $P$  entonces  $\underline{\mathbf{S}}(f, P) \leq \mathcal{S} \leq \overline{\mathbf{S}}(f, P)$ , y como también  $\underline{\mathbf{S}}(f, P) \leq \int_a^b f \leq \overline{\mathbf{S}}(f, P)$  concluimos que la distancia entre  $\mathcal{S}$  y  $\int_a^b f$  es menor que  $\varepsilon$ . Es decir, cualquier suma de Riemann  $\mathcal{S}$  asociada a una partición  $P \in \mathcal{P}([a, b])$  con  $\|P\| < \delta$  cumple que

$$\left| \mathcal{S} - \int_a^b f \right| < \varepsilon.$$

Por lo tanto,  $f$  es integrable en  $[a, b]$  según la definición de Riemann, con integral igual a  $\int_a^b f$ .

Para probar el recíproco, supongamos que  $f$  es integrable según la definición de Riemann en  $[a, b]$ , con integral  $R$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , si  $\delta$  es como en la definición 6.1.15 y  $P \equiv \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ ,  $\|P\| < \delta$ , podemos tomar  $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$  de manera que  $f(s_i) > M_i - \varepsilon$  ( $1 \leq i \leq n$ ). La correspondiente suma de Riemann  $\mathcal{S}$  verifica simultáneamente

$$\mathcal{S} \geq \overline{\mathbf{S}}(f, P) - \varepsilon(b-a), \quad |\mathcal{S} - R| < \varepsilon.$$

Entonces,

$$\int_a^b f \leq \overline{\mathbf{S}}(f, P) \leq \mathcal{S} + \varepsilon(b-a) < R + \varepsilon + \varepsilon(b-a),$$

y como  $\varepsilon$  es arbitrario,

$$\int_a^b f \leq R.$$

De manera análoga se prueba que  $\int_a^b f \geq R$ , por lo cual  $\int_a^b f = \overline{\int_a^b f} = R$ ,  $f$  es integrable en el sentido de Darboux y

$$\int_a^b f = R. \quad \square$$

**Corolario 6.1.17.** *Sea  $f$  una función integrable en  $[a, b]$ ,  $(P_n)$  una sucesión de particiones de  $[a, b]$  tal que  $\lim_n \|P_n\| = 0$ . Si para cada  $n$  se considera una suma de Riemann  $\mathcal{S}_n$  correspondiente a la partición  $P_n$  y a la función  $f$ , entonces*

$$\lim_n \mathcal{S}_n = \int_a^b f.$$

**Ejemplo.** Para toda función  $f$  integrable en  $[0, 1]$ ,  $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f$ .

## 6.2. Propiedades básicas de la integral de Riemann

### 6.2.1. Operaciones con funciones integrables

Empezaremos probando la linealidad de la integral. Para ello nos conviene observar antes lo siguiente:

**Lema 6.2.1.** *Sea  $A$  un conjunto acotado y no vacío de números reales. Entonces:*

- a)  $\sup(-A) = -\inf A$ ;  $\inf(-A) = -\sup A$ .
- b) Para todo  $\alpha > 0$  se cumple que  $\sup(\alpha A) = \alpha \sup A$ ,  $\inf(\alpha A) = \alpha \inf A$ .
- c)  $\sup A - \inf A = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}$ .

*Demostración.* a) Si  $y = \inf A$  y  $x \in A$  resulta que  $-x \leq -y$ , luego  $-y$  es cota superior de  $-A$ , y por tanto  $\sup(-A) \leq -\inf A$ . Si  $s = \sup(-A)$ , dado  $x \in A$  tenemos que  $-x \leq s$ , es decir que  $-s \leq x$ , luego  $-s$  es una cota inferior de  $A$  y entonces  $-\sup(-A) \leq \inf A$ , o sea  $-\inf A \leq \sup(-A)$ . Ya tenemos que  $\sup(-A) = -\inf A$ , y entonces  $\sup A = \sup(-(-A)) = -\inf(-A)$ , luego  $\inf(-A) = -\sup A$ .

b) Si  $s = \sup A$ , dado  $x \in A$  tenemos que  $\alpha x \leq \alpha s$ , luego  $\alpha s$  es una cota superior de  $\alpha A$ ; por tanto  $\sup(\alpha A) \leq \alpha \sup A$ . Por la misma razón tenemos que  $\sup A = \sup \frac{1}{\alpha} \alpha A \leq \frac{1}{\alpha} \sup(\alpha A)$ , y entonces  $\alpha \sup A \leq \sup(\alpha A)$ . Por tanto  $\sup(\alpha A) = \alpha \sup A$ . Y de a) se deduce que  $\alpha \inf A = -\alpha \sup(-A) = -\sup(-\alpha A) = \inf(\alpha A)$ .

c) Recordemos que, dados dos conjuntos acotados  $A$  y  $B$ ,  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ . Notemos que el conjunto  $\{|x - y| : x, y \in A\}$  es la intersección con  $[0, +\infty)$  de  $\{x - y : x, y \in A\} = A + (-A)$ , luego su supremo es igual al de este y, por a),  $\sup(A + (-A)) = \sup A + \sup(-A) = \sup A - \inf A$ .  $\square$

**Teorema 6.2.2.** *Sean  $f$  y  $g$  funciones integrables en  $[a, b]$  y sea  $\alpha$  un número real. Entonces*

- a)  $\alpha f$  es integrable y  $\int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f$ .
- b)  $f + g$  es integrable y  $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ .

*Demostración.* a) Notemos primero que  $f$  es acotada, y entonces  $\alpha f$  también lo es.

Si  $\alpha = 0$  el resultado es inmediato. Si  $\alpha > 0$ , para cada partición  $P$  de  $[a, b]$  se obtiene, usando la parte b) del lema 6.2.1, que  $\overline{\mathbf{S}}(\alpha f, P) = \alpha \overline{\mathbf{S}}(f, P)$  y  $\underline{\mathbf{S}}(\alpha f, P) = \alpha \underline{\mathbf{S}}(f, P)$ . Por la misma razón, se deduce que

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b \alpha f} &= \alpha \overline{\int_a^b f} = \alpha \int_a^b f, \\ \underline{\int_a^b \alpha f} &= \alpha \underline{\int_a^b f} = \alpha \int_a^b f, \end{aligned}$$

luego  $\alpha f$  es integrable y  $\int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f$ .

Para ver que  $-f$  es integrable ( $\alpha = -1$ ) utilizamos la parte a) del lema: resulta que, para cualquier  $P$ ,  $\overline{\mathbf{S}}(-f, P) = -\underline{\mathbf{S}}(f, P)$  y  $\underline{\mathbf{S}}(-f, P) = -\overline{\mathbf{S}}(f, P)$ , luego

$$\overline{\int_a^b (-f)} = -\underline{\int_a^b f} = -\int_a^b f, \quad \underline{\int_a^b (-f)} = -\overline{\int_a^b f} = -\int_a^b f.$$

Por último, si  $\alpha$  es cualquier valor negativo lo reducimos a los casos anteriores:  $\alpha f = -|\alpha|f$  es integrable, con integral igual a

$$-\int_a^b (|\alpha|f) = -|\alpha| \int_a^b f = \alpha \int_a^b f.$$

b) Notemos primero que  $f + g$  está acotada, porque  $f$  y  $g$  lo están. Dado  $A \subseteq [a, b]$ , para cada  $t \in A$  tenemos que

$$f(t) + g(t) \leq \sup\{f(x) : x \in A\} + \sup\{g(x) : x \in A\},$$

luego

$$\sup\{f(t) + g(t) : t \in A\} \leq \sup\{f(t) : t \in A\} + \sup\{g(t) : t \in A\}$$

y análogamente

$$\inf\{f(t) : t \in A\} + \inf\{g(t) : t \in A\} \leq \inf\{f(t) + g(t) : t \in A\}.$$

Cuando tomamos como  $A$  los subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  que define una partición  $P \in \mathcal{P}([a, b])$ , se sigue que

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}(f + g, P) &\leq \bar{\mathbf{S}}(f, P) + \bar{\mathbf{S}}(g, P), \\ \underline{\mathbf{S}}(f, P) + \underline{\mathbf{S}}(g, P) &\leq \underline{\mathbf{S}}(f + g, P). \end{aligned}$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , podemos tomar dos particiones  $P_1$  y  $P_2$  tales que  $\bar{\mathbf{S}}(f, P_1) - \underline{\mathbf{S}}(f, P_1) < \varepsilon/2$  y  $\bar{\mathbf{S}}(g, P_2) - \underline{\mathbf{S}}(g, P_2) < \varepsilon/2$ . Si  $P = P_1 \cup P_2$ , también  $\bar{\mathbf{S}}(f, P) - \underline{\mathbf{S}}(f, P) < \varepsilon/2$  y  $\bar{\mathbf{S}}(g, P) - \underline{\mathbf{S}}(g, P) < \varepsilon/2$ , y de aquí se deduce que  $\bar{\mathbf{S}}(f + g, P) - \underline{\mathbf{S}}(f + g, P) < \varepsilon$ . Por la condición de integrabilidad de Riemann (teorema 6.1.8),  $f + g$  es integrable. Además tenemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b f + \int_a^b g - \varepsilon &= \int_a^b f - \varepsilon/2 + \int_a^b g - \varepsilon/2 < \underline{\mathbf{S}}(f, P) + \underline{\mathbf{S}}(g, P) \\ &\leq \underline{\mathbf{S}}(f + g, P) \leq \int_a^b (f + g) \leq \bar{\mathbf{S}}(f + g, P) \\ &\leq \bar{\mathbf{S}}(f, P) + \bar{\mathbf{S}}(g, P) < \int_a^b f + \varepsilon/2 + \int_a^b g + \varepsilon/2 \\ &= \int_a^b f + \int_a^b g + \varepsilon. \end{aligned}$$

Es decir, para cualquier  $\varepsilon > 0$  resulta que  $\int_a^b f + \int_a^b g - \varepsilon < \int_a^b (f + g) < \int_a^b f + \int_a^b g + \varepsilon$ , y entonces  $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ .  $\square$

**Nota.** El teorema 6.2.2 dice que el conjunto  $\mathcal{R}([a, b])$  formado por todas las funciones integrables en  $[a, b]$  es un espacio vectorial, y que la aplicación  $\mathcal{R}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f \mapsto \int_a^b f$  es lineal.

El siguiente resultado expresa la monotonía de la integral con respecto al integrando:

**Teorema 6.2.3.** Sean  $f$  y  $g$  funciones integrables en  $[a, b]$  tales que

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{para cada } x \in [a, b].$$

Entonces

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

*Demostración.* Si  $f \leq g$  tenemos que  $0 \leq g - f$ , y es inmediato comprobar que  $\underline{\mathbf{S}}(g - f, P) \geq 0$  para cualquier partición  $P$  del intervalo  $[a, b]$ . Como además  $g - f$  es integrable, se deduce que

$$0 \leq \underline{\mathbf{S}}(g - f, P) \leq \int_a^b (g - f) = \int_a^b g - \int_a^b f. \quad \square$$

**Nota.** En particular, si  $h$  es integrable en  $[a, b]$  y  $h \geq 0$ , entonces

$$\int_a^b h \geq 0.$$

Aunque no es tan sencillo de demostrar, también se cumple la monotonía estricta: si  $h$  es integrable en  $[a, b]$  y  $h(x) > 0$  para todo  $x \in [a, b]$ , entonces  $\int_a^b h > 0$ . Como consecuencia, si dos funciones  $f$  y  $g$  son integrables y se cumple que  $f(x) < g(x)$  en todo  $x \in [a, b]$ , podemos asegurar que  $\int_a^b f < \int_a^b g$ .

**Teorema 6.2.4.** Si  $f$  es integrable en  $[a, b]$ , entonces  $|f|$  es integrable en  $[a, b]$  y

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

*Demostración.* Como  $f$  es integrable, está acotada. Y por lo tanto, la función  $|f|$  también está acotada. Dada una partición

$$P \equiv \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\} \in \mathcal{P}([a, b])$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}(f, P) - \underline{\mathbf{S}}(f, P) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}), \\ \bar{\mathbf{S}}(|f|, P) - \underline{\mathbf{S}}(|f|, P) &= \sum_{i=1}^n (M'_i - m'_i)(x_i - x_{i-1}), \end{aligned}$$

donde, usando la parte (c) del lema,

$$M_i - m_i = \sup\{f(t) : t \in [x_{i-1}, x_i]\} - \inf\{f(t) : t \in [x_{i-1}, x_i]\} = \sup\{|f(t) - f(s)| : s, t \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

para cada  $i$ . Análogamente,

$$M'_i - m'_i = \sup\{||f(t)| - |f(s)|| : s, t \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Como para cada  $t$  y  $s$  la desigualdad triangular inversa dice que  $||f(t)| - |f(s)|| \leq |f(t) - f(s)|$ , resulta que  $M'_i - m'_i \leq M_i - m_i$  para cada  $i$ , y por tanto que  $\bar{\mathbf{S}}(|f|, P) - \underline{\mathbf{S}}(|f|, P) \leq \bar{\mathbf{S}}(f, P) - \underline{\mathbf{S}}(f, P)$  para toda  $P$ . Por la condición de integrabilidad de Riemann resulta que si  $f$  integrable también lo es  $|f|$ .

Ahora, como  $f \leq |f|$  y  $-f \leq |f|$ , por los teoremas 6.2.3 y 6.2.2 tenemos que  $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$  y  $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$ , luego

$$\left| \int_a^b f \right| = \max \left\{ \int_a^b f, -\int_a^b f \right\} \leq \int_a^b |f|. \quad \square$$

En cierto sentido, este resultado puede verse como una generalización de la desigualdad triangular, cambiando sumas por integrales. Pronto iremos comprobando que es tan útil como la propia desigualdad triangular.

**Corolario 6.2.5.** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones integrables en  $[a, b]$ . Entonces las funciones  $\max(f, g)$ ,  $\min(f, g)$  son también integrables en  $[a, b]$ .

*Demostración.* Basta tener en cuenta que

$$\begin{aligned}\max\{f(x), g(x)\} &= \frac{1}{2} [f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|], \\ \min\{f(x), g(x)\} &= \frac{1}{2} [f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|].\end{aligned}\quad \square$$

**Teorema 6.2.6.** Sean  $f$  y  $g$  funciones integrables en  $[a, b]$ . Entonces:

- $f^2$  es integrable en  $[a, b]$ ;
- la función producto  $fg$  es integrable en  $[a, b]$ .

*Demostración.*  $f$  está acotada, así que existe  $K > 0$  tal que  $|f(x)| < K$  para todo  $x \in [a, b]$ . Entonces  $0 \leq f(x)^2 \leq K^2$  para todo  $x$ , luego  $f^2$  también está acotada. Dado  $\varepsilon > 0$ , sea  $P \in \mathcal{P}(I)$  tal que  $\bar{\mathbf{S}}(f, P) - \underline{\mathbf{S}}(f, P) < \frac{\varepsilon}{2K}$ . Si  $P \equiv \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ , entonces, como en el teorema 6.2.4, resulta que  $\bar{\mathbf{S}}(f, P) - \underline{\mathbf{S}}(f, P) = \sum_{i=1}^n r_i(x_i - x_{i-1})$ , donde

$$r_i = \sup\{|f(t) - f(s)| : s, t \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

y análogamente  $\bar{\mathbf{S}}(f^2, P) - \underline{\mathbf{S}}(f^2, P) = \sum_i r'_i(x_i - x_{i-1})$ , donde

$$r'_i = \sup\{|f^2(t) - f^2(s)| : s, t \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Como para cada  $s$  y  $t$  tenemos que

$$\begin{aligned}|f^2(t) - f^2(s)| &= |f(t) + f(s)| \cdot |f(t) - f(s)| \leq (|f(t)| + |f(s)|)|f(t) - f(s)| \\ &\leq 2K|f(t) - f(s)|,\end{aligned}$$

resulta que  $r'_i \leq 2Kr_i$  para cada  $i$ , y por tanto que  $\bar{\mathbf{S}}(f^2, P) - \underline{\mathbf{S}}(f^2, P) \leq 2K(\bar{\mathbf{S}}(f, P) - \underline{\mathbf{S}}(f, P)) < \varepsilon$ , y así vemos que  $f^2$  es integrable, por la condición de integrabilidad de Riemann.

$b)$  Por el apartado  $a)$ , son integrables tanto  $f^2$  como  $g^2$  y  $(f + g)^2$  (ya que  $f + g$  es integrable). Pero

$$fg = \frac{1}{2}((f + g)^2 - f^2 - g^2),$$

y así vemos que  $fg$  es integrable. □

**Observación.** Los teoremas 6.2.4 y 6.2.6 no admiten recíproco: una función  $f$  puede ser no integrable pese a que  $|f|$  y  $f \cdot f = f^2$  sí lo sean. Como ejemplo podemos tomar, en  $I = [0, 1]$ , la función dada por  $f(x) = 1$  si  $x \in \mathbb{Q}$  y  $f(x) = -1$  si  $x \notin \mathbb{Q}$ , de forma que  $f^2 = |f| = 1$ .

## 6.2.2. Integración en subintervalos

**Teorema 6.2.7.** Sea  $f$  una función definida en un intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ . Dado  $c \in [a, b]$ , son equivalentes:

- $f$  es integrable en  $[a, b]$ ;
- $f$  es integrable en  $[a, c]$  y en  $[c, b]$ .

Además, cuando  $f$  es integrable en  $[a, b]$  se tiene:

$$c) \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

*Demostración.*  $b) \implies a)$  Como  $f$  es integrable en  $[a, c]$  y en  $[c, b]$ , en particular  $f$  está acotada en  $[a, c]$  y en  $[c, b]$ : en consecuencia,  $f$  está acotada en  $[a, b]$ .

Además, usando la condición de Riemann, la integrabilidad de  $f$  garantiza que para todo  $\varepsilon > 0$  existen una partición  $P_a^c$  de  $[a, c]$  y una partición  $P_c^b$  de  $[c, b]$  tales que

$$\overline{\mathbf{S}}(f, P_a^c) - \underline{\mathbf{S}}(f, P_a^c) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \overline{\mathbf{S}}(f, P_c^b) - \underline{\mathbf{S}}(f, P_c^b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considerando ahora la partición  $P_a^b$  de  $[a, b]$  obtenida al tomar todos los puntos de  $P_a^c$  y los de  $P_c^b$ , se sigue directamente aplicando la definición que

$$\overline{\mathbf{S}}(f, P_a^b) = \overline{\mathbf{S}}(f, P_a^c) + \overline{\mathbf{S}}(f, P_c^b), \quad \underline{\mathbf{S}}(f, P_a^b) = \underline{\mathbf{S}}(f, P_a^c) + \underline{\mathbf{S}}(f, P_c^b),$$

luego

$$\overline{\int_a^b f} \leq \overline{\mathbf{S}}(f, P_a^b) = \overline{\mathbf{S}}(f, P_a^c) + \overline{\mathbf{S}}(f, P_c^b) < \underline{\mathbf{S}}(f, P_a^c) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{\mathbf{S}}(f, P_c^b) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_a^c f + \frac{\varepsilon}{2} + \int_c^b f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es decir,

$$\overline{\int_a^b f} < \int_a^c f + \int_c^b f + \varepsilon$$

para cualquier  $\varepsilon > 0$ . De aquí se obtiene que

$$\overline{\int_a^b f} \leq \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Análogamente,

$$\underline{\int_a^b f} \geq \underline{\mathbf{S}}(f, P_a^b) = \underline{\mathbf{S}}(f, P_a^c) + \underline{\mathbf{S}}(f, P_c^b) > \overline{\mathbf{S}}(f, P_a^c) - \frac{\varepsilon}{2} + \overline{\mathbf{S}}(f, P_c^b) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \int_a^c f - \frac{\varepsilon}{2} + \int_c^b f - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es decir,

$$\underline{\int_a^b f} > \int_a^c f + \int_c^b f - \varepsilon$$

para cualquier  $\varepsilon > 0$ . De ahí se deduce que

$$\underline{\int_a^b f} \geq \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Como  $\overline{\int_a^b f} \geq \underline{\int_a^b f}$ , resulta

$$\overline{\int_a^b f} = \underline{\int_a^b f} = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

lo que nos dice que  $f$  es integrable en  $[a, b]$ , con

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$



a)  $\implies$  b) Si  $f$  es integrable en  $[a, b]$ , para cada  $\varepsilon > 0$  existirá una partición  $Q_a^b$  del intervalo  $[a, b]$  tal que

$$\overline{\mathbf{S}}(f, Q_a^b) - \underline{\mathbf{S}}(f, Q_a^b) < \varepsilon.$$

Sea  $P_a^b$  la partición de  $[a, b]$  obtenida al añadir a  $Q_a^b$  el punto  $c$  (si es que no figura ya en  $Q_a^b$ ), y descompongamos  $P_a^b$  en sendas particiones  $P_a^c$  y  $P_c^b$  de  $[a, c]$  y de  $[c, b]$ , respectivamente. Se tiene

$$\overline{\mathbf{S}}(f, P_a^c) - \underline{\mathbf{S}}(f, P_a^c) + \overline{\mathbf{S}}(f, P_c^b) - \underline{\mathbf{S}}(f, P_c^b) = \overline{\mathbf{S}}(f, P_a^b) - \underline{\mathbf{S}}(f, P_a^b) \leq \overline{\mathbf{S}}(f, Q_a^b) - \underline{\mathbf{S}}(f, Q_a^b) < \varepsilon,$$

y como  $\overline{\mathbf{S}}(f, P_a^c) - \underline{\mathbf{S}}(f, P_a^c)$  y  $\overline{\mathbf{S}}(f, P_c^b) - \underline{\mathbf{S}}(f, P_c^b)$  son no negativos, cada uno de ellos será menor o igual que su suma, por lo que

$$\overline{\mathbf{S}}(f, P_a^c) - \underline{\mathbf{S}}(f, P_a^c) < \varepsilon, \quad \overline{\mathbf{S}}(f, P_c^b) - \underline{\mathbf{S}}(f, P_c^b) < \varepsilon,$$

y por consiguiente  $f$  es integrable en  $[a, c]$  y en  $[c, b]$ .  $\square$

**Corolario 6.2.8.** Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada, y sean  $a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n = b$ . Se cumple que  $f$  es integrable en  $[a, b]$  si y solo si lo es en  $[c_{i-1}, c_i]$  para cada  $i = 1, \dots, n$ , y en tal caso

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} f.$$

*Demostración.* Aplicar inducción sobre  $n$  y el teorema 6.2.7.  $\square$

El siguiente resultado permite ampliar ligeramente la noción de integral y dar ejemplos adicionales de funciones integrables.

**Lema 6.2.9.** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones definidas en un intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$  que coinciden excepto posiblemente en  $a$  y  $b$ , es decir, tales que

$$f(x) = g(x) \text{ para todo } x \in (a, b).$$

Entonces  $f$  es integrable en  $[a, b]$  si y solo si lo es  $g$ . Si son integrables,

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

*Demostración.* Basta probar que la función  $h = f - g$  es una función integrable en  $[a, b]$  con integral nula. Ahora bien:  $h$  se anula en  $(a, b)$ , por lo que para cada partición  $P \equiv \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$  será

$$\overline{\mathbf{S}}(h, P) = \max\{h(a), 0\} \cdot (t_1 - a) + \max\{h(b), 0\} \cdot (b - t_{n-1}) \geq 0,$$

$$\underline{\mathbf{S}}(h, P) = \min\{h(a), 0\} \cdot (t_1 - a) + \min\{h(b), 0\} \cdot (b - t_{n-1}) \leq 0.$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , tomemos  $B > \max\{|h(a)|, |h(b)|\}$  y  $P_\varepsilon$  de manera que

$$t_1 - a < \frac{\varepsilon}{2B}, \quad b - t_{n-1} < \frac{\varepsilon}{2B}.$$

Resulta

$$\int_a^b h \leq \overline{\mathbf{S}}(h, P_\varepsilon) < B \frac{\varepsilon}{2B} + B \frac{\varepsilon}{2B} = \varepsilon, \quad \int_a^b h \geq \underline{\mathbf{S}}(h, P_\varepsilon) > -B \frac{\varepsilon}{2B} - B \frac{\varepsilon}{2B} = -\varepsilon,$$

luego  $\int_a^b h \leq 0 \leq \int_a^b h$ . Por lo tanto,  $\int_a^b h = \int_a^b h = 0$ , es decir,  $h$  es integrable en  $[a, b]$  con integral nula.  $\square$

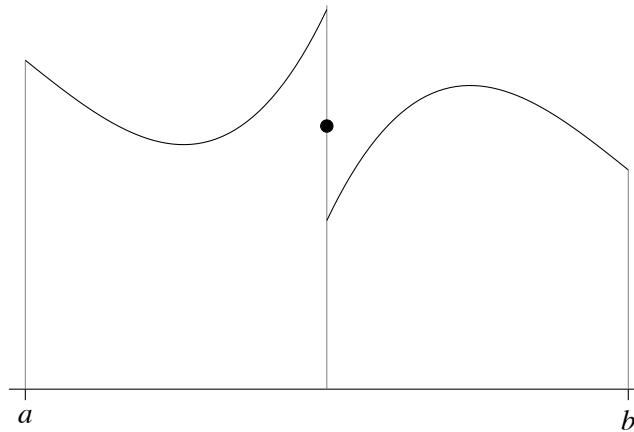
**Corolario 6.2.10.** Sea  $g$  una función integrable en  $[a, b]$ , y sea  $f$  una función igual a  $g$  excepto en un conjunto finito de puntos de  $[a, b]$ . Entonces  $f$  es integrable, y  $\int_a^b f = \int_a^b g$ .

*Demostración.* Por inducción sobre el número de puntos, con ayuda del lema.  $\square$

**Definición 6.2.11.** Una función  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice **continua a trozos** si existe una partición  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$  tal que  $f$  es continua en cada intervalo  $(t_{i-1}, t_i)$  y existen y son reales los límites laterales en cada  $t_i$ .

Una función  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice **monótona a trozos** si existe una partición  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$  tal que  $f$  es monótona (de cualquier clase) en cada intervalo  $(t_{i-1}, t_i)$ .

Por ejemplo, la función de la figura no es continua ni monótona, pero sí continua a trozos y monótona a trozos.



Función continua a trozos y monótona a trozos

**Teorema 6.2.12.** Si  $f$  es una función continua a trozos o una función acotada y monótona a trozos en  $[a, b]$ , entonces  $f$  es integrable en  $[a, b]$ .

*Demostración.* Si  $f$  es continua a trozos y  $t_i$  son como en la definición, para cada  $i$  existe una extensión continua (y por tanto integrable) de  $f|_{(t_{i-1}, t_i)}$  al intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ . Esta extensión es integrable en el intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ , por ser continua, y coincide con  $f$  en  $(t_{i-1}, t_i)$ , luego  $f$  es integrable en  $[t_{i-1}, t_i]$ , por el lema 6.2.9. Por el corolario 6.2.8, resulta que  $f$  es integrable en  $[a, b]$ .

Si  $f$  es monótona a trozos y acotada y  $t_i$  son como en la definición, entonces existen y son reales los límites laterales en cada  $t_i$ . La demostración sigue de manera análoga a la de funciones continuas a trozos.  $\square$

No obstante, hay funciones que son integrables en un intervalo  $[a, b]$  y no son continuas a trozos ni monótonas a trozos. Un ejemplo es la función definida en  $[0, 1]$  mediante

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0, \\ \text{sen } \frac{1}{x}, & \text{si } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

que vimos que era integrable en  $[0, 1]$ .

**6.2.3. Teoremas de la media (o del valor medio) del cálculo integral**

**Teorema 6.2.13.** Sea  $f$  una función integrable en el intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$  y sean  $m, M$  tales que para todo  $x \in [a, b]$  se cumpla

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Entonces el número

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f,$$

denominado **promedio integral** de  $f$  en  $[a, b]$ , está en  $[m, M]$ , es decir

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M.$$

*Demostración.* Puesto que  $m \leq f \leq M$ , por la monotonía de la integral

$$m(b-a) = \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M = M(b-a),$$

y como  $b-a > 0$ , podemos dividir para obtener

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M. \quad \square$$

Cuando  $f$  es continua en  $[a, b]$ , su promedio integral está en el rango de valores de  $f$ :

**Corolario 6.2.14 (teorema de la media del cálculo integral).** Sea  $f$  una función continua (y por tanto integrable) en el intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ . Existe entonces al menos un punto  $x_0 \in [a, b]$  tal que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f = f(x_0).$$

*Demostración.* Por el teorema 4.2.8 de Weierstrass el conjunto  $\{f(x) : x \in [a, b]\}$  tiene mínimo y máximo, a los que llamamos  $m$  y  $M$  respectivamente. Se cumple así que

$$m(b-a) = \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M = M(b-a).$$

Es decir,

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M.$$

Por el teorema 4.2.10 de Darboux (o de los valores intermedios), existe  $x_0 \in [a, b]$  en el que  $f$  toma dicho valor entre  $m$  y  $M$ , y así  $f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$ .  $\square$

**Ejemplo.** Sea  $1 < a < b$ . Para cada  $x \in [a, b]$ ,

$$1 \leq \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x} - 1} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{a} - 1}.$$

Por lo tanto,

$$1 \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} dx \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{a} - 1}. \quad (6.2)$$

En algunas ocasiones, no es necesario calcular el valor exacto de una integral, sino que basta con estimaciones aproximadas. Por ejemplo, de (6.2) se deduce que

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_a^{a+1} \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} dx = 1.$$

El corolario 6.2.14 puede mirarse como una lectura inversa del teorema 5.2.7 del valor medio del cálculo diferencial. De hecho, otra demostración del corolario 6.2.14 consiste en aplicar el teorema del valor medio a la función  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x) = \int_a^x f$ , que es derivable y cuya derivada es  $F'(x) = f(x)$  (según probaremos en el siguiente apartado).

**Teorema 6.2.15.** *Sea  $f$  una función integrable en el intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ , sea  $g$  una función no negativa, integrable en el intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$  y sean  $m, M$  tales que para todo  $x \in [a, b]$  se cumple*

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Entonces existe  $\mu \in [m, M]$  tal que

$$\int_a^b fg = \mu \int_a^b g$$

(el número  $\mu$  es una especie de promedio ponderado de  $f$  respecto a la densidad de masa  $g$ ).

*Demostración.* Puesto que  $g \geq 0$ , se verifica

$$mg \leq fg \leq Mg.$$

Todas estas funciones son integrables, luego podemos poner

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g.$$

Si  $\int_a^b g = 0$ , cualquier  $\mu \in [m, M]$  cumple la igualdad del enunciado. Si  $\int_a^b g \neq 0$ , entonces  $\int_a^b g > 0$ , y basta tomar como  $\mu$  el cociente entre  $\int_a^b fg$  y  $\int_a^b g$ .  $\square$

**Corolario 6.2.16.** *Sea  $f$  una función continua (y por tanto integrable) en el intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$  y sea  $g$  una función no negativa, integrable en  $[a, b]$ . Existe entonces al menos un punto  $x_0 \in [a, b]$  tal que*

$$\int_a^b fg = f(x_0) \int_a^b g.$$

*Demostración.* La función  $f$  tiene máximo y mínimo absolutos sobre  $[a, b]$ , por el teorema 4.2.8 de Weierstrass. Si el máximo y el mínimo se alcanzan en  $c$  y  $d$ , respectivamente, podemos aplicar el teorema 6.2.15 con  $m = f(c)$  y  $M = f(d)$ . Por el teorema 4.2.10 de Darboux, hay al menos un punto  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $f(x_0) = \mu$ , donde  $\mu$  es el valor del teorema 6.2.15.  $\square$

**Proposición 6.2.17 (segundo teorema de la media del cálculo integral).** *Sean  $f$  y  $g$  funciones integrables en un intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ .*

a) *Si  $g \geq 0$  y es no creciente, existe  $x_0 \in [a, b]$  tal que*

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^{x_0} f.$$

b) Si  $g \geq 0$  y es no decreciente, existe  $x_0 \in [a, b]$  tal que

$$\int_a^b fg = g(b) \int_{x_0}^b f.$$

c) Si  $g$  es monótona, existe  $x_0 \in [a, b]$  tal que

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^{x_0} f + g(b) \int_{x_0}^b f.$$

*Demostración.* Ver [GARAY-CUADRA-ALFARO, pág. 212]. □

## 6.3. Teoremas fundamentales del cálculo integral

### 6.3.1. Regla de Barrow (primer teorema fundamental del cálculo integral)

**Teorema 6.3.1 (regla de Barrow).** Sea  $f$  una función integrable en un intervalo  $[a, b]$  y supongamos que existe otra función  $g$  continua en  $[a, b]$ , derivable en  $(a, b)$  y tal que  $g'(x) = f(x)$  para todo  $x \in (a, b)$ . Entonces,

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

*Demostración.* Sea  $P$  una partición cualquiera de  $[a, b]$ ,

$$P \equiv \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}.$$

Según el teorema 5.2.7 del valor medio,

$$\begin{aligned} g(b) - g(a) &= g(x_n) - g(x_0) = \sum_{i=1}^n (g(x_i) - g(x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n g'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}), \end{aligned}$$

donde  $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$  para cada  $i$ . Puesto que

$$\inf\{f(t) : t \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq f(c_i) \leq \sup\{f(t) : t \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

se deduce que

$$\underline{\mathbf{S}}(f, P) \leq g(b) - g(a) \leq \overline{\mathbf{S}}(f, P).$$

Como esto es cierto para cualquier partición  $P$ , tomando supremos e ínfimos resulta que

$$\underline{\int_a^b} f \leq g(b) - g(a) \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Pero sabemos que  $f$  es integrable, así que  $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$ . Por lo tanto,

$$\int_a^b f = g(b) - g(a). \quad \square$$

La regla de Barrow nos dice cómo calcular la integral de una función  $f$  integrable entre  $a$  y  $b$ : si  $g$  es continua en  $[a, b]$  y es una primitiva de  $f$  en  $(a, b)$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = g(b) - g(a).$$

La diferencia  $g(b) - g(a)$  suele escribirse como  $g(x) \Big|_{x=a}^{x=b}$ . Es decir:

$$\int_a^b f(x) dx = g(x) \Big|_{x=a}^{x=b}.$$

**Ejemplo.** La función arc sen es continua, luego integrable, en el intervalo  $[0, 1]$ . Calculando por partes una primitiva, encontramos la función  $x \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + \sqrt{1-x^2}$ , continua en  $[0, 1]$  y derivable claramente en el intervalo  $[0, 1)$ , con derivada  $\operatorname{arc} \operatorname{sen} x$  en ese intervalo; menos claro es lo que sucede en el punto 1, pero según el teorema 6.3.1 no necesitamos saberlo para garantizar que

$$\int_0^1 \operatorname{arc} \operatorname{sen} x dx = \left[ 1 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{sen} 1 + \sqrt{1-1^2} \right] - \left[ 0 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{sen} 0 + \sqrt{1-0^2} \right] = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Si aplicamos la regla de Barrow para calcular una integral, puede ser conveniente utilizar los resultados empleados en el cálculo de primitivas, como el teorema de integración por partes que acabamos de citar o el teorema de cambio de variable. Ambos tienen su versión para integrales. Vemos primero la de integración por partes:

**Teorema 6.3.2 (integración por partes).** Si  $u$  y  $v$  son funciones continuas en  $[a, b]$  derivables en  $(a, b)$  y sus derivadas  $u'$  y  $v'$  son integrables en  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b uv' = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'v.$$

*Demostración.* Notemos que  $u'v$  y  $uv'$  son integrables porque lo son  $u', v'$  (estas por hipótesis) y también  $u$  y  $v$  (porque son continuas). Entonces también es integrable  $(uv)' = u'v + uv'$ , y por la regla de Barrow

$$\int_a^b uv' + \int_a^b u'v = \int_a^b (uv)' = u(b)v(b) - u(a)v(a),$$

de donde obtenemos la fórmula del enunciado. □

**Observación.** Este resultado no se puede utilizar en el ejemplo anterior; ¿por qué?

**Ejemplo.** Veamos que, para cualesquiera  $m$  y  $n$  enteros no negativos,

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

Probémoslo por inducción sobre  $n$ . Primero vemos que la fórmula es válida para  $n = 0$  y cualquier  $m$ , usando la regla de Barrow:

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{m+1} = \frac{m!0!}{(m+0+1)!}.$$

Ahora, si  $n \in \mathbb{N}$  y suponemos que la fórmula es cierta para  $n - 1$  y cualquier  $m$ , integrando por partes concluimos que lo es para  $n$  y cualquier  $m$ : para ello tomamos  $u(x) = (1 - x)^n$  y  $v(x) = x^{m+1}/(m + 1)$ , con lo que

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^m (1 - x)^n dx &= \int_0^1 u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 u'(x)v(x) dx \\ &= \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1} (1 - x)^{n-1} dx, \end{aligned}$$

que por hipótesis de inducción es

$$\frac{n}{m+1} \cdot \frac{(m+1)!(n-1)!}{((m+1) + (n-1) + 1)!} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

**Corolario 6.3.3 (fórmula de Taylor con resto integral).** Sea  $I$  un intervalo,  $c$  un punto de  $I$ ,  $f$  una función definida en  $I$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Supongamos que  $f$  es derivable en  $I$  hasta el orden  $n$  y que  $f^{(n)}$  es continua en  $I$ . Entonces para cada  $x \in I$  es

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} \\ &\quad + \frac{1}{(n-1)!} \int_c^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt. \end{aligned}$$

*Demostración.* Basta integrar por partes reiteradamente

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_c^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt$$

(ver [BARTLE-SHERBERT, teor. 6.3.14, pág. 281]). □

### 6.3.2. Continuidad y derivabilidad de una integral con extremo de integración variable

El teorema 6.3.1 (regla de Barrow) viene a decir que al integrar la derivada de  $f$  recuperamos  $f$  (ya que  $f(x) = f(a) + \int_a^x f'$ ). Para que podamos decir del todo que integrar y derivar son procesos inversos, la pregunta natural sería: ¿podemos decir que derivando una función dada por la integral de  $f$  recuperamos  $f$ ? Es tanto como decir: ¿podemos expresar una primitiva de  $f$  mediante integrales de  $f$ ? La respuesta es afirmativa, como vamos a comprobar.

**Convenio.** Si  $a > b$  y  $f$  es integrable en  $[b, a]$ , escribimos

$$\int_a^b f = - \int_b^a f.$$

Si  $a = b$ , escribimos  $\int_a^b f = 0$ .

Notemos que, con este convenio, la regla de Barrow vale también para integrales  $\int_a^b f$  con  $a \geq b$ . Además, la relación entre las integrales de  $f$  y de  $|f|$  es en general

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

(si  $a < b$  el término de la derecha es  $\int_a^b |f|$ , como hasta ahora). En cuanto a la monotonía, notemos que si  $0 \leq f \leq g$  son funciones integrables podemos asegurar que

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b g \right|,$$

ya que si  $a > b$  esta desigualdad es  $\int_b^a f \leq \int_b^a g$ . Por último, si las integrales tienen sentido entonces

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

cualquiera que sea el orden entre  $a, b$  y  $c$ .

**Teorema 6.3.4 (teorema fundamental del cálculo integral (segundo)).** *Sea  $f$  una función integrable en  $[a, b]$ . Definamos  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mediante*

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Entonces:

- a)  $F$  es continua en  $[a, b]$ ;
- b) si  $f$  es continua en algún  $x_0 \in [a, b]$ , entonces  $F$  es derivable en  $x_0$  y

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

*Demostración.* a) La función  $f$  es integrable, así que está acotada; sea  $K > 0$  tal que  $|f(x)| \leq K$  para todo  $x \in [a, b]$ . Veamos que para cada  $x, y \in [a, b]$ ,  $|F(x) - F(y)| \leq K|x - y|$ .

Si  $x = y$ , no hay nada que probar. Si no, podemos suponer que  $x > y$ , por ejemplo. Entonces,

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^y f(t) dt \right| = \left| \int_y^x f(t) dt \right| \leq \int_y^x |f(t)| dt \leq K|x - y|,$$

como queríamos probar. Ahora, dado  $\varepsilon > 0$ , tenemos: para cada  $x, y \in [a, b]$  con  $|x - y| < \varepsilon/K$ , se cumple que  $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$ . Es decir, la función  $F$  es continua en  $[a, b]$  (de hecho hemos probado que es uniformemente continua).

b) Supongamos que  $f$  es continua en algún  $x_0 \in [a, b]$ . Se trata de probar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Tanto si  $h > 0$  como si  $h < 0$ ,

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt,$$

luego

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)] dt.$$

Entonces,

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)] dt \right|.$$



Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $f$  es continua en  $x_0$ , existe algún  $\delta > 0$  tal que  $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ , si  $|t - x_0| < \delta$ . Sea ahora  $|h| < \delta$ . Si  $h > 0$ , entonces

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \frac{1}{h} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)] dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt = \varepsilon;$$

y si  $h < 0$ ,

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \frac{1}{-h} \left| \int_{x_0+h}^{x_0} [f(t) - f(x_0)] dt \right| \leq \frac{1}{-h} \int_{x_0+h}^{x_0} \varepsilon dt = \varepsilon.$$

En resumen,

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon,$$

si  $|h| < \delta$ . Hemos probado que, en efecto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0). \quad \square$$

Realmente, se cumple un resultado más general:

**Teorema 6.3.5.** *Sea  $f$  una función definida en un intervalo no trivial  $I$  cualquiera, que sea integrable en cualquier intervalo cerrado y acotado contenido en  $I$ . Fijado un punto  $a \in I$ , definamos  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  mediante*

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Entonces:

- a)  $F$  está bien definida y es continua en todo  $I$ ;
- b) en cada punto  $x_0 \in I$  donde  $f$  sea continua,  $F$  es derivable y

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

*Demostración.* Para puntos a la derecha de  $a$ , basta aplicar el teorema 6.3.4 a la función

$$F(x) = \int_a^x f, \quad x \in [a, b],$$

para algún  $b \in I$ ,  $b > a$ . Y para los puntos a la izquierda de  $a$ , basta considerar la función

$$G(x) = \int_b^x f, \quad x \in [b, a],$$

para algún  $b \in I$ ,  $b < a$  y tener en cuenta que  $F(x) = G(x) - G(a)$ . □

**Corolario 6.3.6.** *Toda función  $f$  continua en un intervalo no trivial  $I$  cualquiera admite una primitiva en dicho intervalo.*

*Demostración.* Basta observar que, por ser continua,  $f$  es integrable en cada intervalo cerrado y acotado contenido en  $I$ , y si fijamos un punto  $a \in I$  y consideramos la función  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F(x) = \int_a^x f,$$

por el teorema 6.3.5 resulta que  $F' = f$  en  $I$ . □

**Aplicación.** Podemos construir la función logarítmica como la primitiva de la función  $1/x$  que se anula para  $x = 1$  (ver Apéndice).

**Corolario 6.3.7.** Sea  $f$  una función definida en un intervalo no trivial  $I$  cualquiera, integrable en cualquier intervalo cerrado y acotado contenido en  $I$  y sea  $\alpha: J \rightarrow I$  derivable en  $x_0 \in J$ . Dado  $a \in I$ , sea  $G: J \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por

$$G(x) = \int_a^{\alpha(x)} f.$$

Si  $f$  es continua en  $\alpha(x_0)$ , entonces  $G$  es derivable en  $x_0$ , con

$$G'(x_0) = \alpha'(x_0)f(\alpha(x_0)).$$

*Demostración.* Si definimos  $F$  en  $J$  como  $F(x) = \int_a^x f$ ,  $x \in J$ , entonces  $G = F \circ \alpha$ , y por la regla de la cadena (teorema 5.1.5) y el teorema fundamental del cálculo integral (teorema 6.3.4), resulta que

$$G'(x_0) = \alpha'(x_0)F'(\alpha(x_0)) = \alpha'(x_0)f(\alpha(x_0)). \quad \square$$

**Ejemplo.** Sea  $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$ . Nos proponemos hallar sus extremos relativos y absolutos y sus puntos de inflexión.

No podemos expresar una primitiva de  $e^{-t^2}$  como combinación de funciones elementales, y entonces no podemos aplicar la regla de Barrow (teorema 6.3.1) para calcular la integral y obtener otra expresión de  $F$ . Pero sí que podemos obtener una expresión manejable de la derivada de  $F$ , gracias al teorema fundamental del cálculo integral (teorema 6.3.4) y al corolario 6.3.7, que podemos aplicar porque  $e^{-t^2}$  es continua y  $2x$  es derivable.

Como  $F(x) = \int_0^{2x} e^{-t^2} dt - \int_0^x e^{-t^2} dt$ , resulta que para cualquier  $x \geq 0$ ,

$$F'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2}(2e^{-3x^2} - 1) = e^{-x^2}(e^{\log 2 - 3x^2} - 1).$$

Vemos que  $F'$  tiene el mismo signo que  $\log 2 - 3x^2$ , luego es positiva en  $[0, \sqrt{(\log 2)/3}]$  y negativa en  $(\sqrt{(\log 2)/3}, +\infty)$ . Por tanto  $F$  es creciente en  $[0, \sqrt{(\log 2)/3}]$  y decreciente en  $[\sqrt{(\log 2)/3}, +\infty)$ , y alcanza su máximo absoluto en  $\sqrt{(\log 2)/3}$ . Su mínimo absoluto lo tiene en 0, ya que  $F(0) = 0$  y, para cualquier  $x > 0$ ,  $F(x)$  es positiva por ser la integral de una función positiva en el intervalo no trivial  $[x, 2x]$ .

De la expresión de  $F'$  obtenemos que

$$F''(x) = 16xe^{-4x^2} \left( \frac{1}{8}e^{3x^2} - 1 \right) = 16xe^{-4x^2} (e^{3x^2 - 3\log 2} - 1),$$

de donde su signo es el de  $x^2 - \log 2$ , y deducimos que  $F$  es cóncava en  $[0, \sqrt{\log 2}]$  y convexa en  $[\sqrt{\log 2}, +\infty)$ . Tenemos un único punto de inflexión en  $\sqrt{\log 2}$ .

Es fácil ver, además, que el límite de  $F$  en  $+\infty$  es 0. Basta acotar el valor de  $F$  usando la monotonía de la integral: como  $e^{-t^2}$  es decreciente en  $[0, +\infty)$ , para todo  $t$  en el intervalo  $[x, 2x]$  se cumple que  $e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$ , y entonces

$$F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt \leq \int_x^{2x} e^{-x^2} dt = xe^{-x^2}.$$

Por la regla de L'Hospital 5.3.8 vemos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0$ , luego también  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ . □

**Teorema 6.3.8 (cambio de variable).** Sea  $u$  una función derivable en un intervalo abierto  $J$  tal que  $u'$  es continua y sea  $I$  un intervalo abierto tal que  $u(J) \subseteq I$ . Si  $f$  es continua en  $I$ , entonces  $f \circ u$  es continua en  $J$  y

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt \quad (6.3)$$

para cualesquiera  $a, b \in J$ .

*Demostración.* Sea  $F$  una primitiva de  $f$  en  $I$ . Entonces  $(F \circ u)' = (f \circ u)u'$ , y como  $f$  y  $(f \circ u)u'$  son integrables en intervalos cerrados y acotados (porque son continuas), por la regla de Barrow resulta que

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f = F(u(b)) - F(u(a)) = (F \circ u)(b) - (F \circ u)(a) = \int_a^b (f \circ u)u'. \quad \square$$

**Ejemplo.** Calculemos el valor de  $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx$ .

Ponemos

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 2\sqrt{1-(x/2)^2} dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 4\sqrt{1-(x/2)^2} \frac{1}{2} dx$$

(hacemos el cambio de variable  $t = x/2$  según la fórmula (6.3), de izquierda a derecha)

$$= \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} 4\sqrt{1-t^2} dt$$

(ahora hacemos el cambio de variable  $t = \text{sen } y$  según la fórmula (6.3), de derecha a izquierda)

$$\begin{aligned} &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 4\sqrt{1-\text{sen}^2 y} \cos y dy = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 4|\cos y| \cos y dy = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 4\cos^2 y dy \\ &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 2(1 + \cos 2y) dy = (2y + \text{sen } 2y) \Big|_{y=-\pi/3}^{y=\pi/3} = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

**Ejemplo (integrales de funciones pares e impares).** Si  $f$  es par e integrable en  $[-a, a]$ , entonces

$$\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f.$$

Esto se puede demostrar a partir de la definición de integral o mediante la condición de integrabilidad de Riemann (teorema 6.1.8). El significado geométrico es claro, dado que la gráfica de  $f$  es simétrica respecto de  $x = 0$ .

En el caso particular de que  $f$  sea continua, esta propiedad se puede demostrar de manera más sencilla con un cambio de variable, ya que  $\int_{-a}^a f = \int_{-a}^0 f + \int_0^a f$  y

$$\int_{-a}^0 f(x) dx \stackrel{t=-x}{=} - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(t) dt.$$

Análogamente, si  $f$  es impar entonces  $\int_{-a}^a f = 0$ .

## 6.4. Apéndice: construcción de las funciones logarítmica y exponencial

Ya hemos usado las propiedades de la función logarítmica en ejemplos y ejercicios. Ahora disponemos de las herramientas necesarias para poder construirla, probando con todo rigor su existencia y sus propiedades básicas.

Recordemos que las potencias de exponente racional se definen en  $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$  de la siguiente manera:  $x^n = x \cdot x \cdots x$  ( $n$  veces) si  $n \in \mathbb{N}$ , y  $x^{1/n}$  es la función inversa. Dado  $m$  otro número natural,  $x^{m/n} = (x^{1/n})^m$ , y por último  $x^0 = 1$  y  $x^{-a} = 1/x^a$ .

Resulta que la derivada de la función dada por  $x^a$  es  $ax^{a-1}$ , de manera que una primitiva de  $x^a$  en  $\mathbb{R}^+$  es  $\frac{1}{a+1}x^{a+1}$ , pero esto solo vale si  $a \neq -1$ . Como  $x^{-1} = 1/x$  es continua en  $\mathbb{R}^+$ , podemos usar el teorema fundamental del cálculo integral (teorema 6.3.4) para definir una primitiva en este caso ( $a = -1$ ), la dada por  $\int_c^x (1/t) dt$ , cualquiera que sea  $c > 0$ . Elegimos  $c = 1$ , y la función que resulta cumple todos los requisitos que buscamos para el logaritmo neperiano.

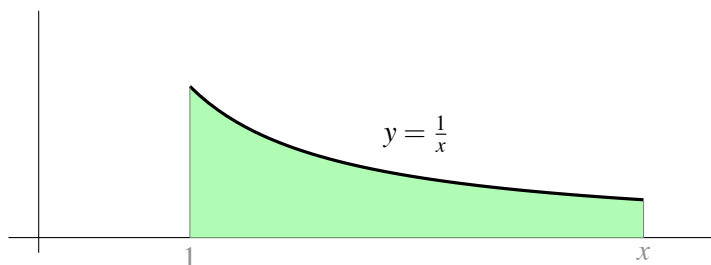
**Proposición 6.4.1.** La función  $L : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

está bien definida, es estrictamente creciente (luego inyectiva) y suprayectiva. Es asimismo derivable en todos los puntos de su dominio y para cada  $x \in (0, +\infty)$

$$L'(x) = \frac{1}{x};$$

en particular, es cóncava en su dominio.



$L(x)$  es el área de la figura

*Demostración.* La función  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(t) = \frac{1}{t}$  es continua, luego  $L$  está bien definida, es derivable en cada  $x \in (0, +\infty)$  y su derivada es la función  $L'(x) = f(x) = \frac{1}{x}$ .

Puesto que  $L' = f$  es estrictamente positiva,  $L$  es estrictamente creciente. Como es continua (porque es derivable), su imagen  $L((0, +\infty))$  es un intervalo, y para ver que este intervalo es todo  $\mathbb{R}$  bastará probar que la función  $L$  no está acotada superior ni inferiormente.

Ahora bien: dados  $a > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ , el cambio de variable  $t = u^n$  permite escribir

$$L(a^n) = \int_1^{a^n} \frac{1}{t} dt = \int_1^a \frac{nu^{n-1}}{u^n} du = n \int_1^a \frac{1}{u} du = nL(a).$$

Tomando  $a > 1$ , como  $L(a) > L(1) = 0$ , se deduce que  $L$  no está acotada superiormente; tomando  $0 < a < 1$ , como  $L(a) < L(1) = 0$ , se deduce que  $L$  no está acotada inferiormente.  $\square$

Con esta información es suficiente para comprobar que su gráfica tiene la forma que ya conocemos (complétese el estudio de la función de la manera habitual). En cuanto a la propiedad esencial del logaritmo de transformar productos en sumas, tenemos:

**Proposición 6.4.2.** Para cualesquiera  $x, y \in (0, +\infty)$ , la función  $L$  cumple  $L(xy) = L(x) + L(y)$ .

*Demostración.* Utilizando el cambio de variable  $t = u/x$ ,

$$L(xy) - L(x) = \int_1^{xy} \frac{1}{t} dt - \int_1^x \frac{1}{t} dt = \int_x^{xy} \frac{1}{t} dt = \int_1^y \frac{x}{u} \frac{du}{x} = \int_1^y \frac{du}{u} = L(y). \quad \square$$

**Observación.** También puede darse otra demostración usando solo el valor de la derivada: fijado arbitrariamente  $y > 0$ , sea  $f_y$  la función dada por  $f_y(x) = L(xy)$ . Entonces

$$f'_y(x) = y \cdot L'(xy) = y \cdot \frac{1}{xy} = \frac{1}{x} = L'(x)$$

para todo  $x$ , luego  $f_y(x) = L(x) + C$ , para cierta constante  $C$ , en todo  $x > 0$ . Si tomamos  $x = 1$  vemos que  $C = L(y)$ .

**Observación.** La sucesión  $(1 + \frac{1}{n})^n$  es convergente, y denotando su límite por  $e$ , resulta  $L(e) = 1$ . En efecto:

$$L \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] = nL \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{L(1 + \frac{1}{n}) - L(1)}{1/n} \rightarrow L'(1) = \frac{1}{1} = 1;$$

la función inversa de  $L$  es continua, porque  $L$  es estrictamente creciente y continua, así que la sucesión  $(1 + \frac{1}{n})^n$  tiene límite y

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = L^{-1}L \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] \rightarrow L^{-1}(1).$$

Es fácil, igualmente, obtener las equivalencias conocidas y el desarrollo de Taylor-Maclaurin para  $L(1+x)$ . Lo dejamos como ejercicio para el lector.

Por último, la función inversa  $L^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ , tiene todas las propiedades admitidas para la función  $e^x$ , de modo que tenemos aquí una manera de introducir rigurosamente la función exponencial.

**Definición 6.4.3.** Se llama **función exponencial** a la función  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\exp(x) = L^{-1}(x)$ .

Así pues,  $\exp(x) = y$  si y solo si  $L(y) = x$ ; en particular,  $\exp(0) = 1$  y  $\exp(1) = e$ . Suele escribirse  $e^x$  en lugar de  $\exp(x)$ .

**Proposición 6.4.4.** a) La función exponencial es derivable (indefinidamente) y su derivada es ella misma: para cada  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\exp'(x) = \exp(x)$ .

b)  $e^0 = 1$ .

c) Para cada  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$  y, en particular,  $e^x \neq 0$ .

d) Dados  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ .

e) Dados  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{nx}$  es el producto de  $n$  factores iguales a  $e^x$ :  $e^{nx} = e^x \cdot \dots \cdot e^x$ .

f) Para cada  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x > 0$ .

g) La función exponencial es estrictamente creciente y convexa. En particular, es inyectiva.

h) Se tiene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

En consecuencia, el conjunto imagen de la función exponencial es  $(0, +\infty)$ .

*Demostración.* a) Como  $L$  es derivable e inyectiva en el intervalo  $(0, +\infty)$ , su inversa  $\exp$  es derivable, según el teorema 5.1.7 de derivación de la función inversa. Además,

$$\exp'(x) = \frac{1}{L'(\exp(x))} = \frac{1}{1/\exp(x)} = \exp(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Es decir, la derivada de la función  $\exp$  es ella misma, luego resulta indefinidamente derivable (igual a todas sus derivadas sucesivas).

b) Obvio.

c) Sea  $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = e^x e^{-x} \in \mathbb{R}$ . Derivando de acuerdo con a),

$$f'(x) = e^x e^{-x} - e^x e^{-x} = 0,$$

luego  $f$  toma constantemente el valor  $f(0) = 1$ .

d) Fijado  $y$ , sea  $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = \frac{e^{x+y}}{e^x} \in \mathbb{R}$ . Teniendo en cuenta a),

$$f'(x) = \frac{e^{x+y} \cdot e^x - e^{x+y} \cdot e^x}{(e^x)^2} = 0,$$

luego  $f$  toma constantemente el valor  $f(0) = e^y$ .

e) Se prueba por inducción sobre  $n$  utilizando d).

f)  $e^x = (e^{x/2})^2 \geq 0$  y  $e^x \neq 0$ .

g) La derivada primera y la derivada segunda de la función exponencial (que son iguales a la función exponencial) son estrictamente positivas.

h) Puesto que la función exponencial es estrictamente creciente,

$$e = e^1 > e^0 = 1,$$

luego  $\lim_n e^n = +\infty$ . De nuevo por la monotonía de la función exponencial, esto basta para probar que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Finalmente,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^y} = 0.$$

Del teorema 4.2.10 de Darboux (o de los valores intermedios) se sigue que el conjunto imagen de la función exponencial es todo el intervalo  $(0, +\infty)$ .  $\square$

En esta demostración se observa que todas las propiedades básicas de la función exponencial se deducen realmente de a) y b), que en este sentido pueden ser consideradas sus propiedades fundamentales.

## 6.5. Apéndice: cálculo de áreas, longitudes y volúmenes

Aunque no vamos a definir con rigor qué es una curva plana, a menudo viene dada como la gráfica de una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $I$  es un intervalo y se pide que  $f$  sea continua, o continua a trozos, o derivable... Esta forma de representar una curva plana se llama **explícita**. Por ejemplo, la gráfica de la función  $y = x^2$  es una parábola. También pueden venir definidas en forma **paramétrica**, es decir, como puntos de la forma  $(x(t), y(t))$ , donde  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  son dos funciones e  $I$  es un intervalo. Por ejemplo, la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio 1 se puede expresar en forma paramétrica como

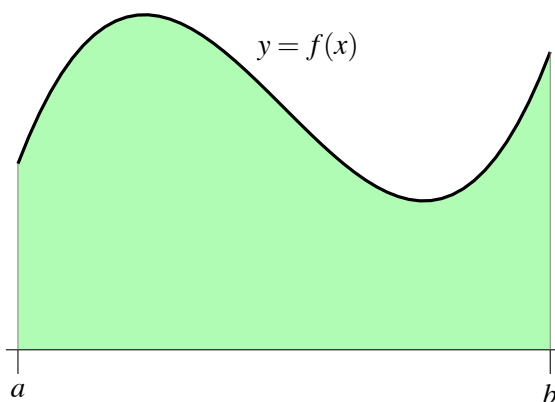
$$\begin{aligned}x &= \cos t, & y &= \sin t, \\t &\in [0, 2\pi]\end{aligned}$$

Otra manera de describir una curva plana es en **coordenadas polares**: si representamos por  $\rho$  el radio y por  $\theta$  un argumento de un punto del plano, los puntos que cumplen  $\rho = 1$  son la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio 1. La ecuación  $\rho = \theta$  es la de una espiral. En general, una curva en coordenadas polares es una relación  $\rho = \varphi(\theta)$ .

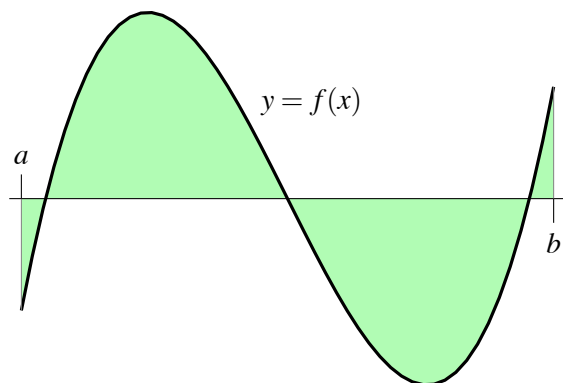
Una curva en forma explícita ( $y = f(x)$ ) se puede expresar siempre en forma paramétrica:  $x = t$ ,  $y = f(t)$ . Una curva en forma polar ( $\rho = \varphi(\theta)$ ) también se puede expresar siempre en forma paramétrica:  $x = \varphi(\theta) \cos \theta$ ,  $y = \varphi(\theta) \sin \theta$ . En cambio, no toda curva en forma paramétrica se puede expresar en forma explícita ni en forma polar. Y no toda curva en forma explícita se puede poner en forma polar ni viceversa.

A continuación recogemos, sin demostración, diversas fórmulas que permiten calcular la longitud de una curva plana y el área de una superficie o el volumen de un cuerpo asociados a curvas planas. En cada caso se supone que las funciones que aparecen son continuas a trozos, o derivables a trozos, según haga falta para que las integrales estén bien definidas.

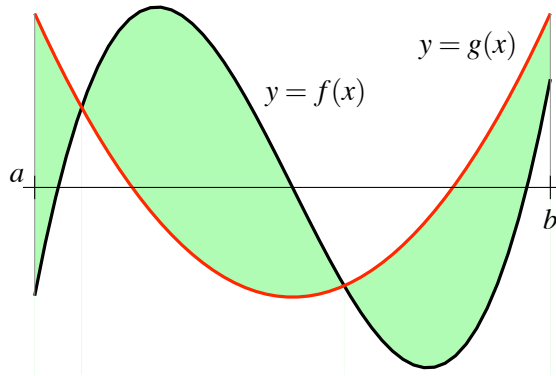
### Área de una figura plana



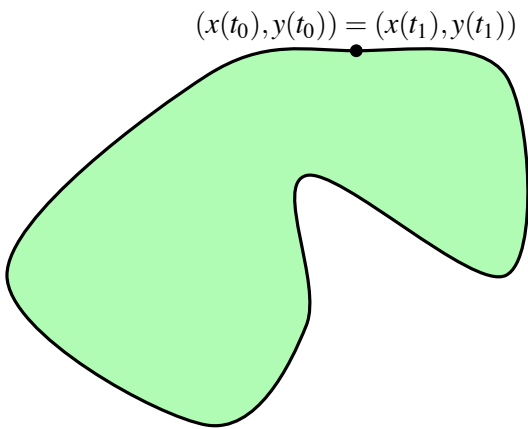
El área de la figura es  $\int_a^b f(x) dx$ ,  
si  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in [a, b]$



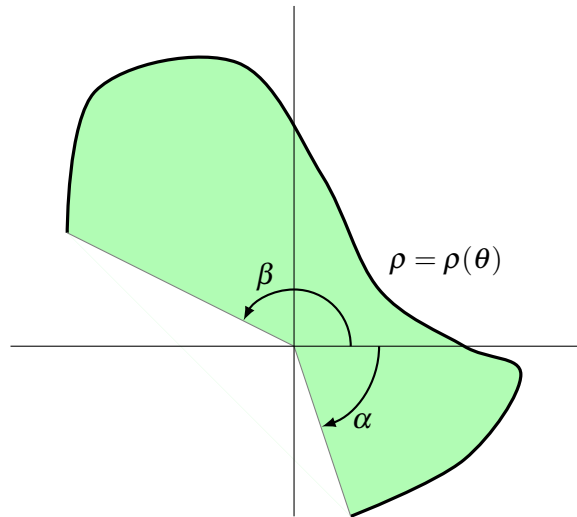
El área de la figura es  $\int_a^b |f(x)| dx$



El área de la figura es  $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

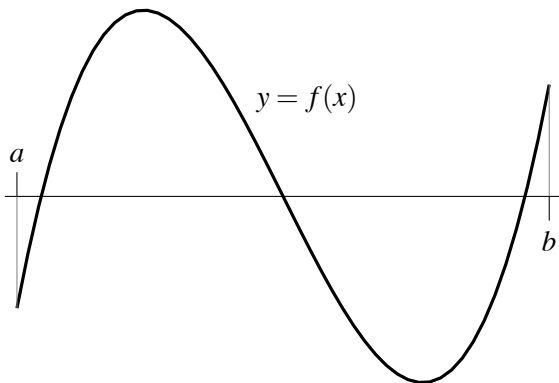


El área de la figura es  $\left| \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t) dt \right|$ ,  
si la curva es cerrada

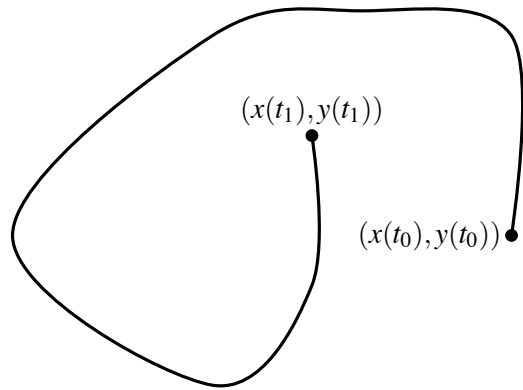


El área de la figura es  $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\theta)^2 d\theta$

**Longitud de una curva plana**

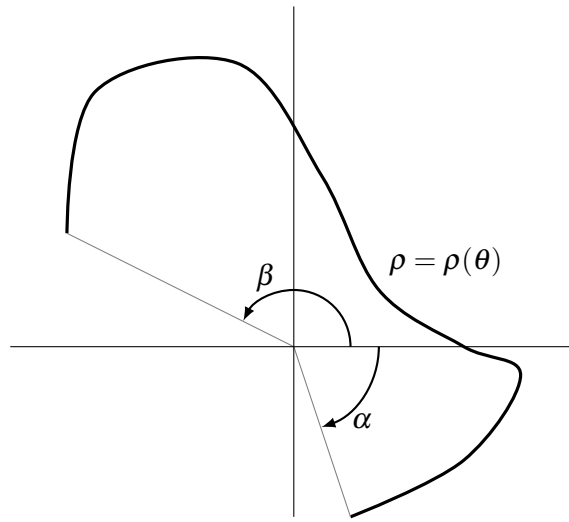


La longitud de la curva es  $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$



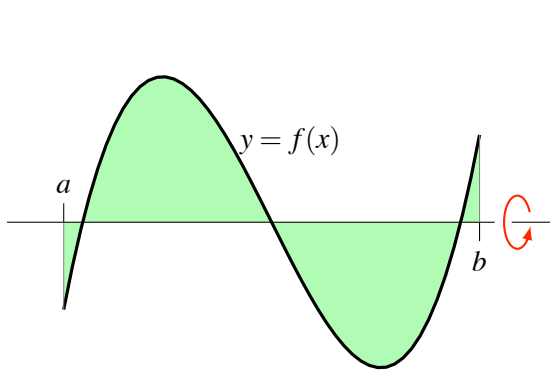
La longitud de la curva es  $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$



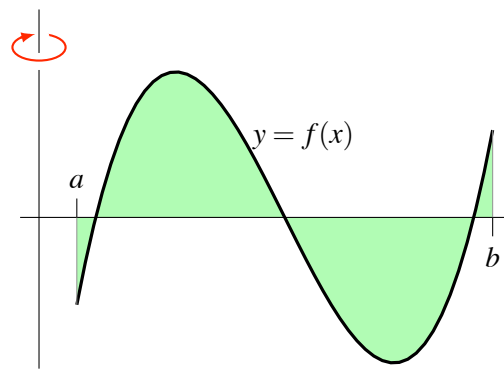


El área de la figura es  $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta$

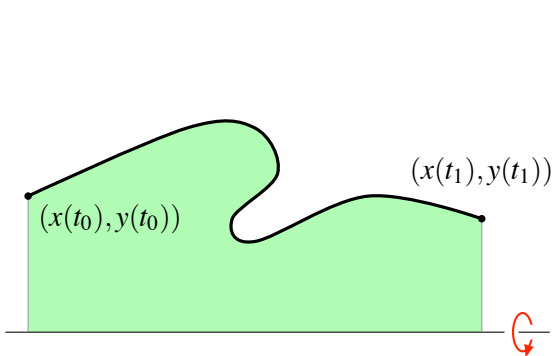
**Volumen de un cuerpo de revolución**



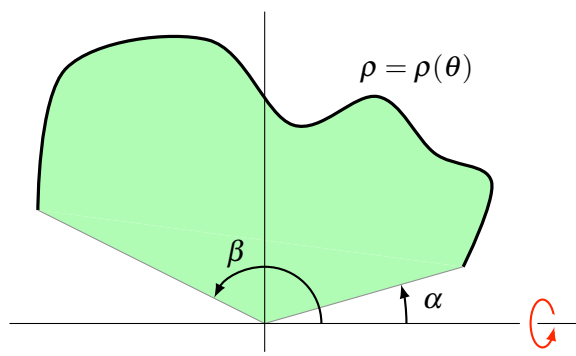
El volumen del cuerpo generado al girar la figura alrededor del eje  $x$  es  $\int_a^b \pi f(x)^2 dx$



El volumen del cuerpo generado al girar la figura alrededor del eje  $x$  es  $\int_a^b 2\pi x |f(x)| dx$ , si  $a, b \geq 0$

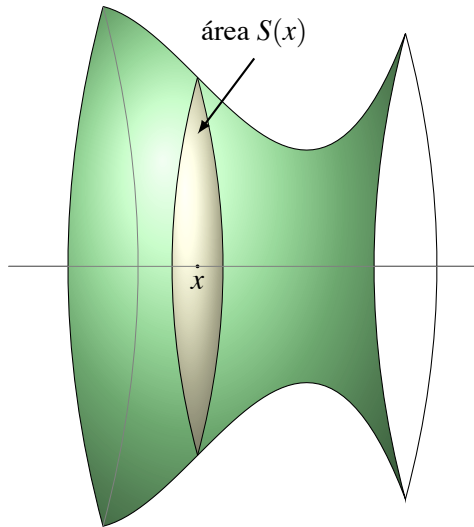


El volumen del cuerpo generado al girar la figura alrededor del eje  $x$  es  $\left| \int_{t_0}^{t_1} \pi y(t)^2 x'(t) dt \right|$ , si  $y(t) \geq 0$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$



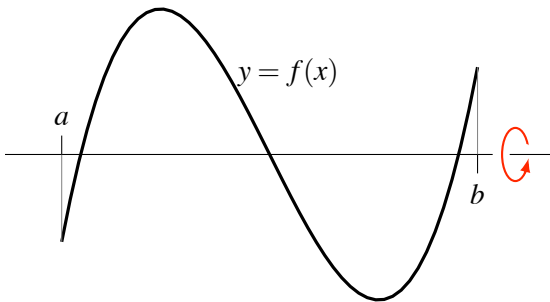
El volumen del cuerpo generado al girar la figura alrededor del eje  $x$  es  $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{2\pi}{3} \rho(\theta)^3 \sin \theta d\theta$ , si  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \pi$

**Volumen de un cuerpo de secciones conocidas**

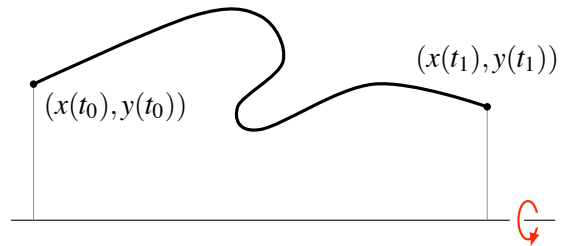


El volumen de la figura es  $\int_a^b S(x) dx$ , donde  $S(x)$  es el área de la sección perpendicular al eje en  $x$

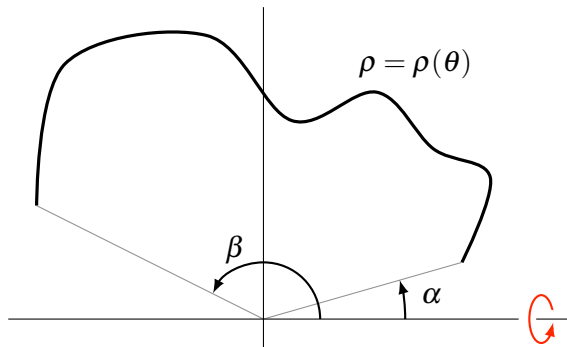
**Área de una superficie de revolución**



El área de la superficie generada al girar la curva alrededor del eje  $x$  es  $\int_a^b \pi f(x)^2 dx$



El área de la superficie generada al girar la curva alrededor del eje  $x$  es  $\left| \int_{t_0}^{t_1} \pi y(t)^2 x'(t) dt \right|$ , si  $y(t) \geq 0$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$



El área de la superficie generada al girar la curva alrededor del eje  $x$  es  $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{2\pi}{3} \rho(\theta)^3 \sin \theta d\theta$ , si  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \pi$

## 6.6. Apéndice: cálculo de primitivas

### 6.6.1. Métodos básicos de integración

**Integración por partes:** si  $f$  y  $g$  son dos funciones derivables,

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx.$$

**Cambio de variable:** Si  $\int f(t) dt = F(t)$ , esto es,  $F'(t) = f(t)$ , y  $\varphi$  es una función derivable, entonces  $\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = F(\varphi(x))$ . Abreviadamente,

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(t) dt = F(t) = F(\varphi(x)).$$

En el primer paso “se hace el cambio de variable  $t = \varphi(x)$ ,  $dt = \varphi'(x) dx$ ”; en el último paso “se deshace el cambio  $t = \varphi(x)$ ”.

### 6.6.2. Integrales elementales

a)  $\int (x+a)^r dx = \frac{(x+a)^{r+1}}{r+1} + C$ , si  $r \neq -1$

b)  $\int \frac{dx}{x+a} = \log|x+a| + C$

c)  $\int e^x dx = e^x + C$

d)  $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$

e)  $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$

f)  $\int \cosh x dx = \operatorname{senh} x + C$

g)  $\int \operatorname{senh} x dx = \cosh x + C$

h)  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \operatorname{tg} x + C$

i)  $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

j)  $\int \frac{dx}{(x+a)^2 + b^2} = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{x+a}{b} + C = -\frac{1}{b} \operatorname{arcctg} \frac{x+a}{b} + D$ , si  $b \neq 0$

k)  $\int \frac{2(x+a)}{(x+a)^2 + b} dx = \log|(x+a)^2 + b| + C$

l)  $\int \frac{2(x+a)}{[(x+a)^2 + b]^n} dx = \frac{1/(1-n)}{[(x+a)^2 + b]^{n-1}} + C$ , si  $n \neq 1$

- m)  $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)^2+b}} = \log \left| x+a + \sqrt{(x+a)^2+b} \right| + C$
- n)  $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2-(x+a)^2}} = \arcsen \frac{x+a}{b} + C = -\arccos \frac{x+a}{b} + D$ , si  $b > 0$
- ñ)  $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctg x + C = -\operatorname{arctg} x + D$  (es un caso particular de j))
- o)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arg} \operatorname{senh} x + C = \log(x + \sqrt{x^2+1}) + C$  (es un caso particular de m))
- p)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arg} \operatorname{cosh} x + C = \log \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + C$  (es un caso particular de m))
- q)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x + C = -\arccos x + D$  (es un caso particular de n))

### 6.6.3. Integración de algunos tipos de funciones

**Funciones integrables por partes:**  $\int f(x)g(x)dx$ , donde  $f(x)$  es un polinomio y  $g(x)$  es una de las funciones siguientes:  $e^{ax}$ ,  $\operatorname{sen} ax$ ,  $\operatorname{cos} ax$ ,  $\arcsen ax$ ,  $\arctg ax$ ,  $\log x$ ,  $(x+a)^n \dots$ ; o bien  $f(x)$  es una función seno o coseno y  $g(x)$  es una función exponencial. Se puede intentar el método de integración por partes.

**Funciones racionales (cocientes de polinomios):**

- a)  $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ , donde  $n \in \mathbb{N}$ . Se resuelve de forma recurrente:  $I_1 = \arctg x + C$ ; si  $n \geq 2$ ,

$$I_n = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{n-1}$$

- b)  $\int \frac{dx}{(x^2+ax+b)^n}$ , donde  $a^2-4b < 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Se reduce al caso anterior haciendo cuadrados y el cambio de variable  $y = \frac{1}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}x + \frac{a}{2}$ :

$$\int \frac{dx}{(x^2+ax+b)^n} = \left(b - \frac{a^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}-n} \int \frac{dy}{(1+y^2)^n}$$

- c)  $\int \frac{Mx+N}{(x^2+ax+b)^n} dx$ , donde  $a^2-4b < 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Se reduce a una integral inmediata y otra del tipo anterior:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+ax+b)^n} dx = \frac{M}{2} \int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^n} dx + \left(N - \frac{aM}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+ax+b)^n}$$

- d)  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ , donde  $P$  y  $Q$  son polinomios cualesquiera. Se reduce a integrales inmediatas y de los tipos anteriores, descomponiendo  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  en fracciones simples: una suma de un polinomio y una o varias funciones racionales de las formas  $\frac{Mx+N}{(x^2+ax+b)^n}$ ,  $\frac{A}{(x+c)^m}$ .

**Funciones trigonométricas:**

- a)  $\int R(\operatorname{sen}x) \cos x dx$ , donde  $R$  es una función racional. Se reduce a la integral de una función racional con el cambio  $t = \operatorname{sen}x$ .
- b)  $\int R(\cos x) \operatorname{sen}x dx$ , donde  $R$  es una función racional. Se reduce a la integral de una función racional con el cambio  $t = \cos x$ .
- c)  $\int R(\operatorname{tg}x) dx$ , donde  $R$  es una función racional. Se reduce a la integral de una función racional con el cambio  $t = \operatorname{tg}x$ .
- d)  $\int R(\operatorname{sen}x, \cos x) dx$ , donde  $R$  es una función racional. Se reduce a la integral de una función racional con el cambio  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ,  $dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $\operatorname{sen}x = \frac{2t}{1+t^2}$ .
- e) Los productos de funciones trigonométricas se transforman en sumas, mediante las fórmulas siguientes:

$$2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

$$2 \cos a \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

$$2 \operatorname{sen} a \cos b = \operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b)$$

$$\text{En particular: } \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}; \operatorname{sen}^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}.$$

**Algunas funciones irracionales:**

- a)  $\int R(x, x^{m/n}, \dots, x^{r/s}) dx$ , donde  $R$  es una función racional. Se reduce a la integral de una función racional mediante el cambio  $x = t^k$ , donde  $k$  es un común múltiplo de los denominadores  $n, \dots, s$ .
- b)  $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}\right) dx$ , donde  $R$  es una función racional. Se reduce a la integral de una función racional con el cambio  $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$ .
- c)  $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ . Si  $a = 0$  es inmediata. Y si  $a \neq 0$  también, ya que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}}}.$$

- d)  $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ , donde  $P$  es un polinomio. Se hallan una constante  $K$  y un polinomio  $Q$  de grado menor que  $P$ , tales que

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q(x) \sqrt{ax^2+bx+c} + K \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

- e)  $\int \frac{dx}{(x-u)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}$ . Se hace el cambio  $x-u = \frac{1}{t}$  y se reduce a una de las anteriores.

- f)  $\int R(x, \sqrt{a^2 - (x+b)^2}) dx$ , donde  $R$  es una función racional. Se reduce a la integral de una función de tipo trigonométrico mediante uno de los dos cambios  $x+b = acost$ ,  $x+b = asent$ .
- g)  $\int R(x, \sqrt{(x+b)^2 - a^2}) dx$ , donde  $R$  es una función racional. Se reduce a la integral de una función de tipo trigonométrico mediante uno de los dos cambios  $x+b = \frac{a}{cost}$ ,  $x+b = \frac{a}{sent}$ .
- h)  $\int R(x, \sqrt{a^2 + (x+b)^2}) dx$ , donde  $R$  es una función racional. Se reduce a la integral de una función de tipo trigonométrico mediante uno de los dos cambios  $x+b = atgt$ ,  $x+b = \frac{a}{tgt}$ .
- i)  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ , donde  $R$  es una función racional. O bien se expresa como uno de los tres tipos anteriores, o bien se reduce a la integral de una función racional mediante un **cambio de variable de Euler**:
- $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$ , si  $a > 0$ ;
  - $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$ , si  $c > 0$ ;
  - $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x-u)$ , si  $au^2 + bu + c = 0$ .
- j)  $\int x^r (a + bx^s)^p dx$ , donde  $r$ ,  $s$  y  $p$  son números racionales. Solo se integran en los siguientes casos:
- Si  $p \in \mathbb{N}$ , se desarrolla  $(a + bx^s)^p$  y es inmediata.
  - Si  $p$  es un entero negativo, se hace el cambio  $x = t^k$ , donde  $k$  es un denominador común de las fracciones  $r$  y  $s$ .
  - Si  $\frac{r+1}{s} \in \mathbb{Z}$ , se hace el cambio  $a + bx^s = t^k$ , donde  $k$  es el denominador de la fracción  $p$ .
  - Si  $\frac{r+1}{s} + p \in \mathbb{Z}$ , se hace el cambio  $a + bx^s = x^s t^k$ , donde  $k$  es el denominador de la fracción  $p$ .

## 6.7. Ejercicios

**Ejercicio 6.1.** Calcular las primitivas de las siguientes funciones:

- |                                       |   |                                     |
|---------------------------------------|---|-------------------------------------|
| 1) $\frac{(1 + \sqrt{x})^3}{x^{1/3}}$ | 2) $\frac{(\arcsen x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$ | 3) $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$         |
| 4) $4\cos^3 x - 3\cos x \sen x$       | 5) $\frac{\sen^3 x}{\sqrt{\cos x}}$     | 6) $\frac{1}{a^2 e^x + b^2 e^{-x}}$ |
| 7) $x^5 \sqrt{1-x^3}$                 | 8) $\frac{1}{x(x^7+1)}$                 | 9) $\frac{1}{\sen x + \cos x}$      |
| 10) $\arctg x$                        | 11) $\cos x \log(1 + \cos x)$           | 12) $\log^2 x$                      |
| 13) $\frac{\cos 2x}{e^x}$             | 14) $\frac{x \arcsen x}{\sqrt{1-x^2}}$  | 15) $x \tg^2 x$                     |

16) $\frac{xe^x}{(1+x)^2}$	17) $\frac{x^2-3x+3}{x^2-3x+2}$	18) $\frac{1}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$
19) $\frac{x}{x^4+(a+b)x^2+ab}$	20) $\frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}$	21) $\frac{1}{x^4+x^2+1}$
22) $\frac{1}{x^4+1}$	23) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	24) $\frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4}$
25) $\frac{(1+\sqrt{x})^2}{2+\sqrt{x}}$	26) $\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}$	27) $\frac{1}{x\sqrt{2x+1}}$
28) $\frac{1}{x(\sqrt{1+x}-2)}$	29) $\frac{3x^{2/3}-7}{x-7x^{1/3}+6}$	30) $\frac{3}{x+3(x+4)^{2/3}}$
31) $\frac{x+\sqrt{x+1}}{x-\sqrt{x+1}}$	32) $\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}$	33) $\frac{1}{x+1}\sqrt{\frac{3+x}{x-1}}$
34) $\sec^3 x$	35) $\frac{1}{(a+b\cos x)\operatorname{sen} x}$	36) $\frac{1}{2+3\operatorname{tg} x}$
37) $\frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$	38) $\frac{x^2-3x+7}{\sqrt{2x^2+4x+5}}$	39) $\frac{x^2}{\sqrt{3x^2-x+1}}$

**Ejercicio 6.2.** Calcular los límites siguientes mediante integrales definidas:

a)  $\lim_n \frac{1}{n} \left( \cos \frac{x}{n} + \cos \frac{2x}{n} + \dots + \cos \frac{nx}{n} \right)$

b)  $\lim_n \left( \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$

c)  $\lim_n \left( \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2^4}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n^4}} \right)$

d)  $\lim_n \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}, \quad (k \geq 0)$

**Ejercicio 6.3.** Sea  $f$  continua en  $[0, a]$ . Comprobar que

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

y calcular, para  $n = 1$  y  $n = 3$ ,  $\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen}^n x}{1 + \cos^2 x} dx$ .

**Ejercicio 6.4.** Calcular las integrales definidas siguientes:

a)  $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx$     b)  $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx$     c)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{3 + \operatorname{sen}^2 x} dx$

d)  $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx$     e)  $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{(1+x)^2} dx$     f)  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$

**Ejercicio 6.5.** Probar que las siguientes funciones son derivables y hallar sus derivadas:

a)  $F(x) = \int_a^{x^3} \operatorname{sen}^3 t \, dt$

b)  $F(x) = \int_a^b f(x+t) \, dt$ , con  $f$  continua

c)  $F(x) = \int_0^x xf(t) \, dt$ , con  $f$  continua

d)  $F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t) \, dt$ , con  $h$  continua y  $f$  y  $g$  derivables

**Ejercicio 6.6.** Demostrar que si  $f$  es continua,  $\int_0^x f(u)(x-u) \, du = \int_0^x \left( \int_0^u f(t) \, dt \right) du$ .

**Ejercicio 6.7.** Hallar el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{x^2}^x \frac{e^t - 1}{\operatorname{sen} t^2} \, dt}{\log x}$ .

**Ejercicio 6.8.** Demostrar que  $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$ , para cada  $n \geq 2$ . Probar que para cada  $n \geq 1$  se tiene:

a)  $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x \, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}$

b)  $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}$

**Ejercicio 6.9.** Hallar el área de la figura limitada por la parábola  $y = -x^2 - 2x + 3$ , su tangente en el punto  $(2, -5)$  y el eje  $y$ .

**Ejercicio 6.10.** Calcular el área de la figura limitada por la curva  $y^2 = x(x-1)^2$ .

**Ejercicio 6.11.** La corona circular centrada en el origen y de radio interior  $\sqrt{2}$  y radio exterior  $\sqrt{6}$  se corta con la parábola de ecuación  $x = y^2$ . Hallar el área de una de las dos superficies que se forman.

**Ejercicio 6.12.** Hallar el valor del parámetro  $\lambda$  para el que la curva  $y = \lambda \cos x$  divide en dos partes de igual área la región limitada por el eje  $x$ , la curva  $y = \operatorname{sen} x$  y la recta  $x = \pi/2$ .

**Ejercicio 6.13.** Hallar la longitud del arco que la recta  $x = 4/3$  corta en la curva  $y^2 = x^3$ .

**Ejercicio 6.14.** Calcular la longitud del arco de la curva  $y = \log \cos x$  entre los puntos de abscisas  $x = 0$ ,  $x = \pi/4$ .

**Ejercicio 6.15.** Hallar la longitud del arco de la curva  $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \log y$  entre los puntos  $y = 1$  e  $y = 2$ .

**Ejercicio 6.16.** Hallar la longitud de la astroide  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ , donde  $a > 0$ .

**Ejercicio 6.17.** Hallar el volumen del sólido obtenido al girar la curva  $a^2y^2 = ax^3 - x^4$  alrededor del eje  $x$  ( $a > 0$ ).



**Ejercicio 6.18.** Calcular el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje  $x$  la figura limitada por  $y = a \cosh \frac{x}{a}$  y las rectas  $x = c, x = -c$  ( $a, c > 0$ ).

**Ejercicio 6.19.** La figura limitada por la senoide  $y = \sin x$  ( $0 \leq x \leq \pi/2$ ), el eje de ordenadas y la recta  $y = 1$  gira alrededor del eje  $y$ . Calcular el volumen del sólido de revolución así engendrado.

**Ejercicio 6.20.** Hallar el área del elipsoide formado al girar alrededor del eje  $x$  la elipse de ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ).

**Ejercicio 6.21.** Hallar el área de la superficie generada al girar alrededor del eje  $y$  la porción de la curva  $y = x^2/2$  cortada por la recta  $y = 3/2$ .

**Ejercicio 6.22.** Hallar el área de la superficie generada al girar alrededor del eje  $x$  la porción de la curva  $y^2 = 4 + x$  cortada por la recta  $x = 2$ .