Tema 4

Extremos de funciones de dos y tres variables

Introducción.

En este capítulo extenderemos las técnicas aplicadas para encontrar los valores extremos de una función de una sola variable a funciones de dos y tres variables. De este modo veremos otra de las aplicaciones de las derivadas parciales.

Máximos y mínimos.

Si (x_0, y_0) es un punto del conjunto D tal que para todo punto $(x, y) \in D$ se verifica que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ entonces se dice que la función f alcanza en (x_0, y_0) su *mínimo absoluto* en el conjunto D.

Análogamente, si (x_0, y_0) es un punto del conjunto D tal que para todo punto $(x, y) \in D$ se verifica que $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ entonces se dice que la función f alcanza en (x_0, y_0) su *máximo absoluto* en el conjunto D.

Los valores que toma la función en los puntos anteriormente mencionados reciben el nombre de valores mínimo y máximo absolutos de f en D. De forma general se les denomina *extremos absolutos* de f.

Igual que en el cálculo de una variable, distinguimos entre extremos absolutos y extremos relativos.

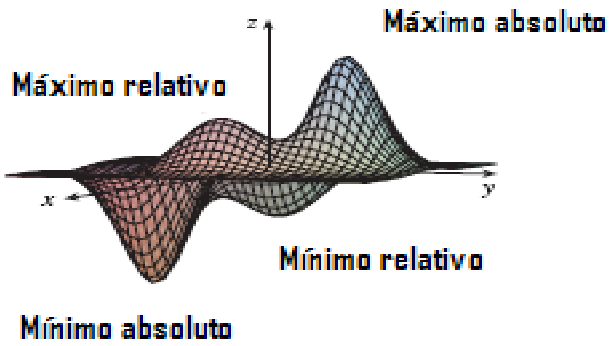
Extremos relativos

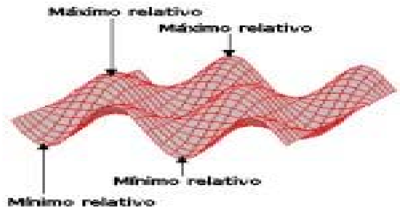
Sea f una función definida en un conjunto D al que pertenece el punto (x_0, y_0)

1. si $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ para todo (x, y) en un disco abierto que contiene a (x_0, y_0) se dice que f tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0) y que el número real $f(x_0, y_0)$ es un *mínimo relativo* de f.

2. si $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ para todo (x, y) en un disco abierto que contiene a (x_0, y_0) se dice que f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0) y que el número real $f(x_0, y_0)$ es un *máximo relativo* de f.

Decir que $z_0 = f(x_0, y_0)$ es un máximo relativo de f significa que el punto (x_0, y_0, z_0) es al menos tan alto como los puntos de su entorno en la gráfica de $z = f(x, y)$. De forma similar, $z_0 = f(x_0, y_0)$ es un mínimo relativo de f si (x_0, y_0, z_0) está al menos tan bajo como los puntos de su entorno en la gráfica.





Las anteriores definiciones se generalizan inmediatamente a funciones de tres variables y en este caso lo enunciaremos de forma alternativa:

Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función entonces diremos que

1. f alcanza un <u>mínimo relativo</u> en $(x_0, y_0, z_0) \in D$ si en para cada punto (x, y, z) de algún entorno de este punto se verifica $f(x, y, z) \geq f(x_0, y_0, z_0)$.

2. f alcanza un <u>máximo relativo</u> en $(x_0, y_0, z_0) \in D$ si en para cada punto (x, y, z) de algún entorno de este punto se verifica $f(x, y, z) \leq f(x_0, y_0, z_0)$.

Condiciones necesarias de máximo o mínimo.

Para localizar extremos relativos de f, investigaremos los puntos en que su gradiente es cero o no está definido. Llamaremos a tales puntos *puntos críticos* de f.

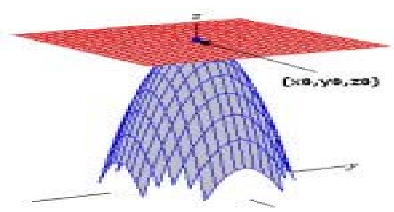
Definición de punto crítico

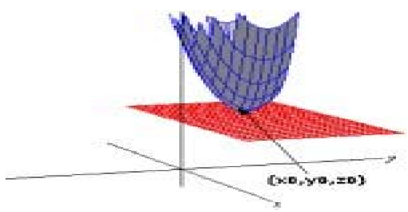
Sea f definida en un conjunto abierto D conteniendo (x_0, y_0). Decimos que (x_0, y_0) es un punto crítico de f si se verifica una de las siguientes condiciones:

1. $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$

2. $f_x(x_0, y_0)$ ó $f_y(x_0, y_0)$ no existen.

Recordemos que si f es diferenciable y $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ entonces toda derivada direccional en (x_0, y_0) ha de ser cero. Eso implica que la gráfica de la función tiene su plano tangente horizontal en el punto (x_0, y_0, z_0), siendo $z_0 = f(x_0, y_0)$, como se ilustra en las figuras siguientes. Es evidente que ese punto es candidato a que haya en él un extremo relativo.





Teorema

Si $f(x_0, y_0)$ es un extremo relativo de f en un conjunto abierto D, entonces (x_0, y_0) es un punto crítico de f.

Igual que ocurre en el caso de una variable, no todos los puntos críticos son extremos relativos de la función. En un punto crítico, la función puede tener un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguna de las dos cosas.

Ejemplo 1 Consideremos los puntos críticos de las siguientes tres funciones:

$$\text{a) } z = x^2 + y^2 \quad \text{b) } z = 1 - x^2 - y^2 \quad \text{c) } z = y^2 - x^2$$

a) $z_x = 2x$, $z_y = 2y$. Por tanto el único punto crítico es el $(0,0)$. La función tiene un mínimo relativo en $(0,0)$ porque x^2 e y^2 son no negativos, luego $x^2 + y^2 \geq 0$.

b) $z_x = -2x$, $z_y = -2y$. El único punto crítico de esta función es el $(0,0)$. Se tiene que en este punto $z = 1$. Sin embargo, $1 - x^2 - y^2 \leq 1$. De donde sigue que la función posee un máximo relativo en $(0,0)$.

c) $z_x = -2x$, $z_y = 2y$. El único punto crítico de esta función es el $(0,0)$. Esta función no tiene máximo ni mínimo relativo en $(0,0)$ ya que en $(0,0)$ la función $z = 0$, sin embargo, cuando $x = 0$ es $z > 0$ si $y \neq 0$, mientras que cuando $y = 0$ es $z < 0$ si $x \neq 0$.

Ejemplo 2

Determinar los extremos relativos de

$$f(x,y) = 1 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$$

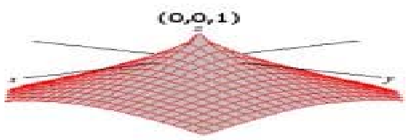
Como

$$f_x(x,y) = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}, \qquad f_y(x,y) = -\frac{2y}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}$$

vemos que ambas derivadas parciales están definidas en todo $\mathbb{R}^2$, excepto en $(0,0)$. Además, este es el único punto crítico, ya que las derivadas parciales no pueden anularse simultáneamente salvo que x e y sean nulos. En la figura siguiente vemos que $f(0,0) = 1$. Para cualquier otro punto (x,y) está claro que

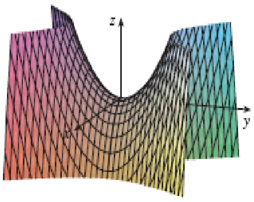
$$f(x,y) = 1 - \sqrt[3]{x^2 + y^2} < 1$$

Luego, $f(0,0)$ es un máximo relativo de f.



En este ejemplo, $f_x(x,y) = 0$ para todo punto del eje Y, excepto $(0,0)$. Sin embargo, como $f_y(x,y)$ no es nula, estos puntos no son puntos críticos. Recordemos que una de las derivadas parciales debe no estar definida o ambas deben anularse en caso de conducir a un punto crítico.

El último teorema nos dice que para encontrar los extremos relativos necesitamos solamente examinar valores de $f(x, y)$ en puntos críticos. Sin embargo, al igual que se cumple para una función de una variable, los puntos críticos de una función de dos variables no siempre nos conducen a máximos o mínimos relativos. Algunos puntos críticos conducen a puntos de silla, que no son ni máximos ni mínimos relativos. Por ejemplo, el punto de silla que se muestra en la figura siguiente no es un extremo relativo, ya que en un disco abierto centrado en el $(0, 0)$ la función toma ambos, valores negativos (sobre el eje X) y valores positivos (sobre el eje Y).



Los ejemplos anteriores muestran que en un punto crítico no tiene por qué haber necesariamente un máximo o un mínimo. Concretamente, en la última figura se observa cómo esto es posible. La gráfica corresponde al paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que tiene como plano tangente en el origen el plano horizontal $z = 0$. No obstante, en $(0, 0)$ no hay máximo ni mínimo. Corresponde a lo que se conoce con el nombre de *punto de silla* en referencia clara a su forma.

En el caso de funciones de tres variables, la definición de punto crítico es análoga y la condición necesaria de extremo similar, encontrándose éstos entre los puntos críticos. De este modo, los extremos de una función $f(x, y, z)$ se encuentran entre los puntos que verifiquen una de las siguientes condiciones:

1. $f_x(x_0, y_0, z_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0, z_0) = 0$ y $f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. $f_x(x_0, y_0, z_0)$, $f_y(x_0, y_0, z_0)$ ó $f_z(x_0, y_0, z_0)$ no existen.

De forma análoga al caso de las funciones de una variable, se dispone de un criterio que proporciona condiciones suficientes, en el caso de funciones de dos variables, para determinar la naturaleza de un punto crítico. Estas condiciones, como veremos, se basan en las derivadas parciales de segundo orden.

Hessiano.

Si la función $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales de segundo orden en un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ se denomina Hessiano de f en el punto $(x, y) \in D$ al determinante:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}$$

Si la función $u = f(x, y, z)$ tiene derivadas parciales de segundo orden en un conjunto $D \subset \mathbb{R}^3$ se denomina Hessiano de f en el punto $(x, y, z) \in D$ al determinante:

$$H(x,y,z) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y,z) & f_{xy}(x,y,z) & f_{xz}(x,y,z) \\ f_{yx}(x,y,z) & f_{yy}(x,y,z) & f_{yz}(x,y,z) \\ f_{zx}(x,y,z) & f_{zy}(x,y,z) & f_{zz}(x,y,z) \end{vmatrix}$$

Condiciones suficientes para la existencia de extremo.

Sea f una función con derivadas parciales primeras y segundas continuas en un conjunto abierto que contiene un punto (a, b) para el que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$. Si $H(a, b)$ representa el Hessiano de f en (a, b) entonces se verifica:

1. Si $H(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$ entonces f alcanza en el punto (a, b) un mínimo relativo.
2. Si $H(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$ entonces f alcanza en el punto (a, b) un máximo relativo.
3. Si $H(a, b) < 0$ entonces la función tiene un punto de silla en (a, b).
4. Si $H(a, b) = 0$ entonces no se tiene información por esta vía.

Si $H(a, b) > 0$, entonces $f_{xx}(a, b)$ y $f_{yy}(a, b)$ deben tener el mismo signo. Esto significa que se puede reemplazar $f_{xx}(a, b)$ por $f_{yy}(a, b)$ en las dos primeras partes del criterio.

Ejemplo 1

Encontrar los extremos relativos de

$$f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$$

Comenzamos buscando los puntos críticos de f. Puesto que

$$f_x(x, y) = -3x^2 + 4y, \qquad f_y(x, y) = 4x - 4y$$

están definidas para todo x e y, los únicos puntos críticos son aquellos para los cuales ambas derivadas parciales primeras son nulas. Para localizar estos puntos, hacemos $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ cero y obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} -3x^2 + 4y = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{array}\right\}$$

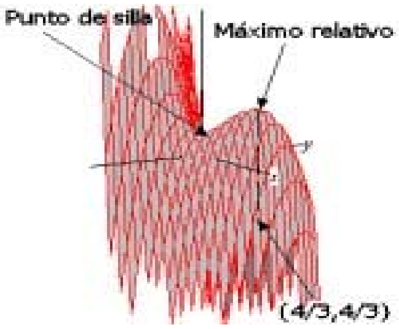
De la segunda ecuación vemos que $x = y$, y sustituyendo en la primera obtenemos dos soluciones: $y = x = 0$ e $y = x = 4/3$. Como

$$f_{xx}(x, y) = -6x, \qquad f_{yy}(x, y) = -4 \qquad \text{y} \qquad f_{xy}(x, y) = 4$$

se sigue que para el punto crítico $(0, 0)$, $H(0, 0) = -16 < 0$ y, por el criterio de las derivadas parciales segundas, concluimos que $(0, 0, 1)$ es un punto de silla de f. Para el punto crítico (4/3,4/3), se tiene $H(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = 16 > 0$ y como

$$f_{xx}(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = -8 < 0$$

concluimos que f(4/3,4/3) es un máximo relativo, como se muestra en la figura:



El criterio de las derivadas parciales segundas puede fallar, a la hora de buscar los extremos relativos, de dos formas. Si una de las derivadas parciales primeras no está definida, entonces no podemos usar el criterio. También si $H(a,b)=0$ el criterio no es útil. En tales casos, debemos confiar en una gráfica o en algún otro tipo de tratamiento, como se ve en el ejemplo 4

Ejemplo 2

Hallar los extremos relativos de $f(x,y)=x^2y^2$.

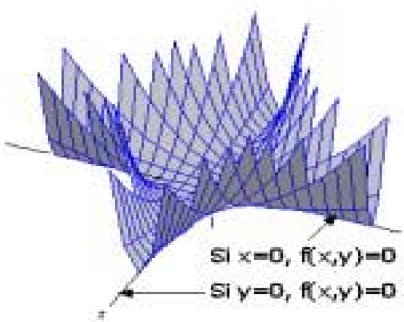
Como

$$f_x(x,y)=2xy^2 \qquad \text{y} \qquad f_y(x,y)=2x^2y$$

vemos que ambas derivadas parciales son nulas si $x=0$ o $y=0$. Es decir, todo punto de el eje X o del eje Y es un punto crítico. Como

$$f_{xx}(x,y)=2y^2, \qquad f_{xy}(x,y)=4xy, \qquad f_{yy}(x,y)=2x^2$$

vemos que $H(0,0)=0$. Luego el criterio de las derivadas parciales segundas no decide. Sin embargo, como $f(x,y)=0$ para todo punto del eje X o del eje Y, y puesto que $f(x,y)=x^2y^2>0$ para los demás puntos, podemos concluir que cada uno de estos puntos críticos conduce a un mínimo absoluto, como se muestra en la figura:



Extremos absolutos.

Una función f de una variable continua en un intervalo $[a,b]$ alcanza en él sus valores máximo y mínimo absolutos. Para encontrar estos valores se evalúa f en los puntos críticos y en los extremos a y b del intervalo.

En el caso de funciones de dos variables se presenta una situación similar a la hora de encontrar los extremos relativos. Así como un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ contiene sus puntos extremos a y b, un **conjunto cerrado** en $\mathbb{R}^2$ contiene todos sus *puntos frontera*. (Un punto frontera de $D \subset \mathbb{R}^2$ es aquel que verifica que dado cualquier disco centrado en dicho punto tiene puntos comunes con D y con su complementario). Por ejemplo, el disco

$$D = \{(x, y)| \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$$

que consiste en todos los puntos que están dentro o en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, es un conjunto cerrado ya que contiene todos los puntos de su frontera que es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Sin embargo, si al menos un punto de esta circunferencia fuera omitido el conjunto ya no sería cerrado.

Un conjunto es **acotado** en $\mathbb{R}^2$ si está contenido en algún disco.

En estas condiciones se tiene:

Teorema de los Valores Extremos

Sea f una función continua de dos variables x e y definida en un conjunto cerrado y acotado D de $\mathbb{R}^2$.

1. *Al menos hay un punto en D en el que f adquiere su valor mínimo absoluto.*
2. *Al menos hay un punto en D en el que f adquiere su valor máximo absoluto.*

Los extremos absolutos de una función se alcanzan en la frontera de D o bien en el interior de D en un punto crítico de f. Partiendo de esta idea, para determinar los extremos absolutos de una función f en un conjunto cerrado y acotado D procederemos del siguiente modo:

Paso 1 Determinar todos los puntos críticos de f.

Paso 2 Determinar todos los puntos de la frontera de D donde se puedan dar extremos absolutos (puntos críticos en la frontera, extremos de intervalos, etc.).

Paso 3 Calcular el valor de $f(x_0, y_0)$ para cada uno de los puntos (x_0, y_0) hallados en los pasos 1 y 2.

Finalmente, el máximo absoluto de f es el mayor de los valores encontrados en el paso 3 y el mínimo absoluto es el menor de ellos.

Ejemplo 1

Hallar los extremos absolutos de la función

$$f(x,y) = e^{x^2-y^2}$$

en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

Solución

1) $f_x = 2xe^{x^2-y^2}$, $f_y = -2ye^{x^2-y^2}$. Estas derivadas parciales están definidas para todo (x,y). Como $f_x = f_y = 0$ sólo para $x = 0$, $y = 0$, entonces $(0,0)$ es el único punto crítico de f.

2) Estudiemos los valores de f en la frontera, que es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Como $y^2 = 1 - x^2$ en la frontera, sustituyendo en la expresión de f se tiene

$$f(x,y) = e^{x^2-(1-x^2)} = e^{2x^2-1}$$

entendiendo que ésta es la restricción de f a la frontera $x^2 + y^2 = 1$. Sea $F(x) = e^{2x^2-1}$ para $-1 \leq x \leq 1$; hay que hallar los valores en que se alcancen los extremos de F. Como es una función de una variable, vemos que

$$F'(x) = 4xe^{2x^2-1}$$

luego $F'(x) = 0$ implica que $x = 0$ o bien que $e^{2x^2-1} = 0$. Como la función exponencial no se anula nunca, se tiene que $F'(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$. Para $x = 0$ es $0^2 + y^2 = 1$, luego $y^2 = 1$, esto es, $y = \pm 1$, lo que da los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$. Los extremos del intervalo de definición de F son $x = \pm 1$, lo que implica que $y^2 = 1 - 1 = 0$; esto da lugar a los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$.

3) Determinemos los valores de f en los puntos hallados en los apartados 1) y 2):

Puntos		Valores
$(0,0)$		$f(0,0) = 1$
$(0,1)$		$f(0,1) = e^{-1}$
$(0,-1)$		$f(0,-1) = e^{-1}$
$(1,0)$		$f(1,0) = e$
$(-1,0)$		$f(-1,0) = e$

Como se ve en la tabla anterior, el máximo absoluto de f en el disco dado es e y se alcanza en los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$. El mínimo absoluto de f es e^{-1} y se alcanza en los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$.

Ejemplo 2

Hallar los extremos absolutos de la función

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$$

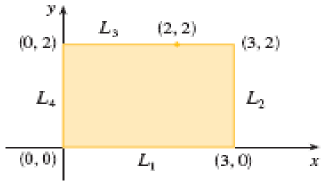
en el rectángulo

$$D = \{(x,y)| \quad 0 \leq x \leq 3 \ , \ 0 \leq y \leq 2\}$$

Solución

1) $f_x = 2x - 2y$, $f_y = -2x + 2$. Resolviendo el sistema $f_x = 0$, $f_y =$ se obtiene como única solución $x = 1$, $y = 1$.

2) Estudiemos los valores extremos de f sobre la frontera de D, que consiste en las cuatro



líneas L_1, L_2, L_3 y L_4 de la figura

Sobre L_1 se tiene $y = 0$ y, por tanto

$$f(x, 0) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 3$$

Ésta es una función creciente de x que alcanza su valor mínimo en $(0, 0)$, donde se anula su derivada. Por consiguiente, tenemos dos puntos: $(0, 0)$ y $(3, 0)$ ya que 3 es el extremo del intervalo.

Sobre L_2 se tiene $x = 3$ y

$$f(3, y) = 9 - 4y, \quad 0 \leq y \leq 2$$

que no tiene puntos críticos, por tanto consideraremos los extremos del intervalo, aportando los puntos $(3, 0)$ y $(3, 2)$ (este último ya contabilizado por L_1).

Sobre L_3 se tiene $y = 2$ y

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4, \quad 0 \leq x \leq 3$$

Esta función tiene un punto crítico en $x = 2$. Con esto se producen los puntos $(2, 2)$, además de $(0, 2)$ y $(3, 2)$ por los extremos del intervalo (este último ya contabilizado).

Finalmente, sobre L_4 es $x = 0$ y, por tanto,

$$f(0, y) = 2y, \quad 0 \leq y \leq 2$$

no tiene puntos críticos y aporta, por los extremos del intervalo $[0, 2]$ los puntos $(0, 0)$ y $(0, 2)$ ya contabilizado.

3) Todo esto lo podemos resumir en la siguiente tabla

Puntos		Valores
$(1, 1)$		$f(1, 1) = 1$
$(0, 0)$		$f(0, 0) = 0$
$(3, 0)$		$f(3, 0) = 9$
$(3, 2)$		$f(3, 2) = 1$
$(2, 2)$		$f(2, 2) = 0$
$(0, 2)$		$f(0, 2) = 4$

Como se ve en la tabla anterior, el máximo absoluto de f en el rectángulo dado es 9 y se alcanza en el puntos $(3, 0)$. El mínimo absoluto de f es 0 y se alcanza en los puntos $(0, 0)$ y $(2, 2)$.

Ejemplo 3

Encontrar los extremos absolutos de la función $f(x, y) = \text{ sen }(xy)$ en la región cerrada dada por $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le 1$.

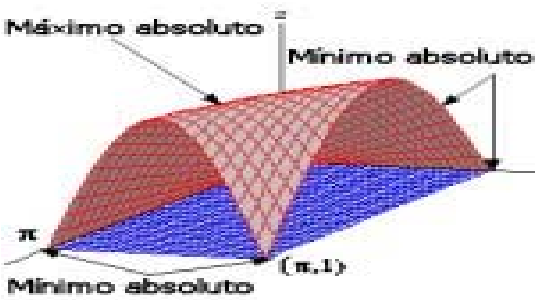
Solución

De las derivadas parciales

$$f_x(x, y) = y\cos(xy), \qquad f_y(x, y) = x\cos(xy)$$

vemos, que cada punto de la hipérbola $xy = \dfrac{\pi}{2}$ es un punto crítico. Además, en cada uno de estos puntos f toma el valor uno, que sabemos que es el máximo absoluto, como se ve en la figura siguiente. El otro punto crítico de f situado en la región dada es $(0, 0)$. Conduce a un mínimo absoluto de 0, ya que

$$0 \le xy \le \pi \Rightarrow 0 \le \text{sen }(xy) \le 1$$



Para buscar otros extremos absolutos, consideremos las cuatro fronteras de la región formada al proyectar según los planos verticales $x = 0$, $x = \pi$,$y = 0$, $y = 1$. Una vez hecho eso, vemos que $\text{sen }(xy) = 0$ en todos los puntos del eje X, del eje Y, así como el punto $(\pi, 1)$. Cada uno de estos puntos proporciona un mínimo absoluto de la superficie de la figura.

Extremos relativos para funciones de tres variables.

Para funciones de tres variables las condiciones suficientes de extremo las podemos sintetizar como sigue:

Sea f una función con derivadas parciales primeras y segundas continuas en un conjunto abierto que contiene un punto (x_0, y_0, z_0) para el que $f_x(x_0, y_0, z_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0, z_0) = 0$ y $f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$. Si se denota por $H(x, y, z)$ el Hessiano de f en el punto (x, y, z) y por

$$H_1(x, y, z) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y, z) & f_{xy}(x, y, z) \\ f_{yx}(x, y, z) & f_{yy}(x, y, z) \end{vmatrix}$$

entonces se tiene

1. Si

   a) $f_{xx}(x_0, y_0, z_0) > 0$,
   b) $H_1(x_0, y_0, z_0) > 0$, y
   c) $H(x_0, y_0, z_0) > 0$

   entonces f alcanza un mínimo relativo en (x_0, y_0, z_0).

2. Si

   a) $f_{xx}(x_0, y_0, z_0) < 0$,
   b) $H_1(x_0, y_0, z_0) > 0$, y
   c) $H(x_0, y_0, z_0) < 0$

   entonces f alcanza un máximo relativo en (x_0, y_0, z_0).

Ejemplo 1
Determinar los extremos relativos de la función

$$G(x, y, z) = -3x^2 + 5x - 5y^2 + 18y - 7z^2 + 54z - 10$$

Solución
En primer lugar determinamos las derivadas parciales de primer orden y las igualamos a cero:

$$G_x = -6x + 5 = 0 G_y = -10y + 18 = 0 G_z = -14z + 54 = 0$$

De este sencillo sistema se obtiene: $x = 5/6$, $y = 9/5$, $z = 27/7$.
Las derivadas parciales de segundo orden valen:
$G_{xx} = -6$, $G_{yy} = -10$, $G_{zz} = -14$, $G_{xy} = G_{xz} = G_{yz} = 0$.
Por consiguiente tenemos:

1. $G_{xx} = -6 < 0$

2. $H_1(\frac{5}{6}, \frac{9}{5}, \frac{27}{7}) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} = 60 > 0$

3. $H(\frac{5}{6}, \frac{9}{5}, \frac{27}{7}) = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{vmatrix} = -840 < 0$

De lo que sigue que en el punto $(\frac{5}{6}, \frac{9}{5}, \frac{27}{7})$ la función G tiene un máximo relativo.

Máximos y mínimos condicionados. Multiplicadores de Lagrange.

Los problemas de máximos y mínimos para funciones de varias variables se plantean con frecuencia en forma tal que dichas variables no son todas independientes. Se trata, entonces, de los denominados máximos y mínimos condicionados: las variables están sometidas a una determinada o determinadas condiciones.

Consideremos el siguiente caso:

Ejemplo 1

Una caja rectangular descansa sobre el plano XY con un vértice en el origen. Encontrar el volumen máximo de la caja si su vértice opuesto al origen pertenece al plano $6x+4y+3z = 24$, como se indica en la figura.

Solución

Puesto que un vértice de la caja pertenece al plano $6x + 4y + 3z = 24$, tenemos que $z = \frac{1}{3}(24 - 6x - 4y)$ y podemos escribir el volumen, V, de la caja como función de dos variables:

$$V(x,y) = xy\frac{24 - 6x - 4y}{3} = \frac{24xy - 6x^2y - 4xy^2}{3}$$

Haciendo iguales a cero las dos derivadas parciales primeras,

$$V_x(x,y) = \frac{24y - 12xy - 4y^2}{3} = \frac{y}{3}(24 - 12x - 4y) = 0$$

$$V_y(x,y) = \frac{24x - 6x^2 - 8xy}{3} = \frac{x}{3}(24 - 6x - 8y) = 0$$

obtenemos los puntos críticos $(0,0)$, $(4,0)$ y $(\frac{4}{3}, 2)$. En $(0,0)$ y en el punto $(4,0)$ el volumen es cero, por lo que aplicamos el criterio de las derivadas parciales segundas al punto $(\frac{4}{3}, 2)$

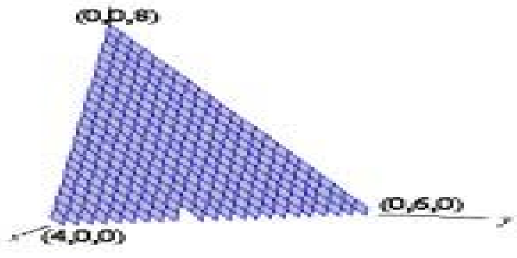
$$V_{xx}(x,y) = -4y, \qquad V_{xy}(x,y) = \frac{24 - 12x - 8y}{3}, \qquad V_{yy} = -\frac{8}{3}x$$

Como

$$H(\frac{4}{3}, 2) = \frac{64}{3} > 0, \qquad V_{xx}(\frac{4}{3}, 2) = -8 < 0$$

deducimos por el criterio de las derivadas parciales segundas que el volumen máximo es

$$V(\frac{4}{3}, 2) = \frac{64}{9}$$



Por consiguiente, las dimensiones de la caja son $\frac{4}{3}\times 2\times\frac{8}{3}$.

En general, no siempre es posible aplicar la técnica mostrada en el ejemplo anterior dado que en todos los casos no se puede despejar una variable en función de las otras. Además, se presentan otras situaciones más complejas en las que intervienen más variables. Para resolver este tipo de problemas se utiliza el denominado *método de los multiplicadores de Lagrange.* Este método está basado en el correspondiente teorema de Lagrange que afirma que si la función $z = f(x,y)$ posee un extremo en (x_0, y_0) condicionado a que las variables x e y satisfagan la condición $g(x,y) = 0$, siendo f y g diferenciables en (x_0, y_0) entonces existe un número real λ tal que:

$$\begin{array}{l} f_x(x_0,y_0) + \lambda g_x(x_0,y_0) = 0 \\ f_y(x_0,y_0) + \lambda g_y(x_0,y_0) = 0 \end{array}$$

De lo cual se deduce que para determinar los extremos de la función $z = f(x,y)$ restringidos a la condición $g(x,y) = 0$ se calculan las derivadas parciales primeras de la función

$$h(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

y se igualan a cero y por inspección se determinan los máximos y los mínimos.

Análogamente, para encontrar los máximos y mínimos de la función f dependiente de (x,y,z) restringidos a la condición $g(x,y,z) = 0$, igualaremos a cero las derivadas parciales de la función

$$h(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

También, para determinar los extremos de la función f de (x,y,z) con las condiciones $g(x,y,z) = 0$, $h(x,y,z) = 0$, tendremos que igualar a cero las derivadas parciales de la función auxiliar

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z)$$

Ejemplo 2

Determinar los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$.

<u>Solución</u>:

Consideremos la función auxiliar

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Si igualamos a cero sus derivadas parciales de primer orden tenemos

$$\left.\begin{array}{c} 2x + 2\lambda x = 0 \\ 4y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\}$$

De la primera ecuación sigue que $x = 0$ o bien $\lambda = -1$.

Si $x = 0$ entonces la última da $y = \pm 1$.

Si $\lambda = -1$ entonces $y = 0$ y la última da $x = \pm 1$.

Por consiguiente, f tiene posibles extremos en los puntos $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ y $(-1,0)$. Evaluando f en esos puntos encontramos que

$$f(0,1) = 2, \quad f(0,-1) = 2, \quad f(1,0) = 1, \quad f(-1,0) = 1$$

De aquí sigue que los valores máximos de f en la circunferencia $x^2+y^2=1$ son $f(\pm 1,0)=1$ mínimo y $f(0,\pm 1)=2$ máximo.

Ejemplo 3

Encontrar los puntos de la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=4$ más próximos al punto $(3,1,-1)$.

Solución:

La distancia de un punto de coordenadas (x,y,z) al punto $(3,1,-1)$ vale

$$d=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}$$

Es evidente que la distancia es máxima si y sólo si su cuadrado d^2 es máximo. Por tanto, en todos los problemas de este tipo es más práctico maximizar o minimizar el cuadrado de la distancia:

$$d^2=f(x,y,z)=(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2$$

Si el punto (x,y,z) pertenece a la esfera entonces sus coordenadas satisfacen la condición

$$x^2+y^2+z^2=4$$

de modo que para resolver el problema construimos la función

$$F(x,y,z,\lambda)=(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$$

Y ahora igualaremos a cero las derivadas parciales de esta última función:

$$\left.\begin{array}{c} 2(x-3)+2\lambda x=0 \\ 2(y-1)+2\lambda y=0 \\ 2(z+1)+2\lambda z=0 \\ x^2+y^2+z^2-4=0 \end{array}\right\}$$

La forma más simple de proceder es resolver el sistema en x, y y z en función de λ en las tres primeras y sustituir en la última:

$$x-3=x\lambda \Rightarrow x(1-\lambda)=3 \Rightarrow x=\frac{3}{1-\lambda}$$

nótese que $1-\lambda\neq 0$ ya que en la primera ecuación es imposible que sea $\lambda=1$.

De forma análoga se tiene

$$y=\frac{1}{1-\lambda},\quad z=\frac{-1}{1-\lambda}$$

De la última ecuación sigue que

$$\frac{3^2}{(1-\lambda)^2}+\frac{1^2}{(1-\lambda)^2}+\frac{(-1)^2}{(1-\lambda)^2}=4$$

Esto conduce a que

$$(1-\lambda)^2=\frac{11}{4}\Rightarrow 1-\lambda=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}\Rightarrow \lambda=1\pm\frac{\sqrt{11}}{2}$$

Estos valores de λ corresponden a los puntos

$$(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}) \quad (-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}})$$

es fácil ver que f toma el menor valor en el primero de estos puntos. Por tanto el que está más cerca de la esfera es

$$(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}})$$

y el más lejano

$$(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}})$$

Ejemplo 4

Determinar los máximos y mínimos de la función $f(x, y, z) = x + y + z$ si $x^2 + y^2 = 1$ y $z = 2$.

Solución:

Consideremos la función auxiliar

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 - 1) + \mu(z - 2)$$

Si igualamos a cero sus derivadas parciales de primer orden tenemos

$$\left.\begin{array}{c} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ 1 + \mu = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

de donde obtenemos dos puntos:

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, 2\right), \qquad \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}, 2\right)$$

y se comprueba que el primero es un máximo y el segundo un mínimo.

Ejemplo 5

Encontrar el máximo de la función $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sobre la curva intersección del plano $x - y + z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Solución:

Se trata de maximizar la función

$$f(x, y, z) = x + 2y + 3z$$

sometida a las condiciones

$$\begin{array}{c} x - y + z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}$$

Para ello construimos la función auxiliar

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = x + 2y + 3z + \lambda(x - y + z - 1) + \mu(x^2 + y^2 - 1)$$

Si igualamos a cero las derivadas parciales de primer orden de esta función obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} 1 + \lambda + 2x\mu = 0 \\ 2 - \lambda + 2y\mu = 0 \\ 3 + \lambda = 0 \\ x - y + z = 1 \\ x^2 + x^2 = 1 \end{array}\right\}$$

De la tercera ecuación se obtiene $\lambda = -3$ que llevado a la primera da

$$-2 + 2\mu x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\mu}$$

Análogamente, llevado a la segunda:

$$5 + 2\mu y = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{2\mu}$$

Llevado esto a la última da:

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{\mu^2} = 1 \Rightarrow \mu^2 = \frac{29}{4} \Rightarrow \mu = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$$

De aquí

$$x = \mp\frac{2}{\sqrt{29}}, \quad y = \pm\frac{5}{\sqrt{29}}$$

y por la penúltima ecuación

$$z = 1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}$$

Los correspondientes valores de f son:

$$\mp\frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm\frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}$$

De lo que sigue, finalmente, que el máximo de f en la curva es $3 + \sqrt{29}$.

Ejemplo 6

Encontrar los extremos absolutos de la función

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3$$

en el círculo $x^2 + y^2 \leq 10$

Solución:

1) En primer lugar buscaremos los puntos críticos de la función que están en el interior del círculo. Para ello consideremos:

$$\begin{aligned} f_x &= 2x - 2 = 0 \\ f_y &= 4y = 0 \end{aligned}$$

De aquí se obtiene el punto $(1,0)$ que es interior al círculo.

2) Para estudiar los puntos de la frontera $x^2 + y^2 = 10$ donde se pudieran producir extremos de f aplicaremos el método de los multiplicadores de Lagrange:

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3 + \lambda(x^2 + y^2 - 10)$$

Igualando a cero las derivadas parciales de F se tiene:

$$\left.\begin{array}{c} 2x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ 4y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación se tiene

$$2y(2+\lambda) = 0 \Rightarrow y = 0, \quad \lambda = -2$$

Si $y = 0$ entonces $x = \pm\sqrt{10}$ por la última ecuación. Se obtienen los puntos $(\sqrt{10}, 0)$ y $(-\sqrt{10}, 0)$.

Si $\lambda = -2$ entonces $x = -1$ y, por la última ecuación $y = \pm 3$. Los puntos que se obtienen así son: $(-1,3)$ y $(-1,-3)$.

3) Todo esto lo podemos resumir en la siguiente tabla

Puntos		Valores
$(1,0)$		$f(1,0) = 2$
$(\sqrt{10},0)$		$f(\sqrt{10},0) = 13 - 2\sqrt{10}$
$(-\sqrt{10},0)$		$f(\sqrt{10},0) = 13 + 2\sqrt{10}$
$(-1,3)$		$f(-1,3) = 24$
$(-1,-3)$		$f(-1,-3) = 24$

Como se ve en la tabla anterior, el máximo absoluto de f en los puntos $(-1,3)$ y $(-1,-3)$ y el mínimo absoluto en el punto $(1,0)$.

Problemas

1. Determinar los extremos relativos de las funciones siguientes:

   a) $z = (x-1)^2 + (y-3)^2$

   b) $z = 9 - (x-3)^2 - (y+2)^2$

   c) $z = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$

   d) $z = -x^2 - 5y^2 + 8x - 10y - 13$

e) $z = x^2 + 6xy + 10y^2 - 4y + 4$

f) $z = -x^2 - y^2 + 120x + 120y - xy$

g) $z = x^4 + 4xy + y^4$

h) $z = \left(\frac{1}{2} - x^2 + y^2\right) e^{1-x^2-y^2}$

i) $z = x^3 - 6xy + y^3 - 15$

j) $u = 8x^2 + 2y^2 - z^3 + 4xy + 3z + 6y$

k) $u = -3x^2 + 6x - 4y^2 + 24y - 7z^2 + 56z - 10$

l) $u = z^2 + \frac{y^2}{2} + 3xy + xz - 20y - 26z + 22x$

m) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

2. Hallar los máximos y mínimos relativos de la función

$$z = 2x^3 + 2y^3 - x^2 - y^2 - 2xy$$

3. Determinar los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $z = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$

b) $z = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3$

c) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xyz$

d) $u = x + 2y + yz - y^2 - x^2 - z^2$

e) $z = x^3 + y^3 + 9xy + 27$

4. Hallar los extremos relativos de las siguientes funciones:

$$f(x,y) = y^2 + x^2y \qquad f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$$

$$f(x,y) = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y} \qquad f(x,y) = \frac{x+y-1}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y) = \frac{x+y+x^2y^2}{xy} \qquad f(x,y) = xy^2 + x^2y - xy$$

$$f(x,y) = \sqrt{3+2x-y^2-x^2} \qquad f(x,y) = x^3 + y^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

5. Hallar los extremos absolutos de la función

$$f(x,y) = \frac{4xy}{(x^2+1)(y^2+1)}$$

en la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1\}$.

6. Máximos y mínimos, relativos y absolutos, de la función

$$f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

definida en el círculo $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$

7. Hallar los extremos absolutos de las siguientes funciones en los conjuntos indicados:

   a) $f(x,y) = -x^2 + xy + y^2 - 6x$ en $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \quad 0 \leq x \leq 5, \ -3 \leq y \leq 3\}$
   b) $g(x,y) = xy^2$ en $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \quad x \geq 0, \ y \geq 0, \ x^2 + y^2 \leq 1\}$
   c) $h(x,y,z) = x + y + z$ en $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \quad x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$

8. Encontrar tres números positivos que sumen 1000 y que la suma de sus cubos sea mínima.

9. Hay 320 metros de tela metálica disponibles para cercar un terreno rectangular. ¿Cómo hay que construir la cerca para que encierre un área máxima?.

10. Entre todos los paralelepípedos rectos rectángulos de área total 200 cm^2 encontrar las dimensiones del que tiene diagonal mínima.

11. Sea $T(x,y,z) = 20 + 2x + 2y + z^2$ la temperatura en cada punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 11$. Calcular las temperaturas máxima y mínima sobre los puntos de la curva intersección de la esfera con el plano $x + y + z = 3$.

12. Calcular la distancia mínima del punto $(2,2,0)$ a la superficie $z = x^2 + y^2$.

13. La suma de la longitud y el perímetro de la sección transversal de un paquete a entregar por un servicio de transporte urgente no puede pasar de 108 cm. Hallar las dimensiones del paquete de máximo volumen que se puede enviar por este servicio.

14. Demostrar que la caja en forma de prisma rectangular de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera es un cubo.

15. Determinar las dimensiones de una piscina abierta y rectangular de volumen 4000 m^3 para que su superficie sea mínima.

16. Hallar las dimensiones de una caja de forma rectangular sin tapa de área 192 cm^2 y volumen máximo.

17. Dividir el número a en tres partes de manera que su producto sea máximo.

18. Hallar las dimensiones del paralelepípedo rectángulo de volumen máximo que tiene tres caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

19. Hallar el punto del plano $3x + 2y + z = 14$ que está más próximo al origen.

20. Hallar los extremos absolutos de la función

$$f(x,y) = \frac{4xy}{(x^2+1)(y^2+1)}$$

en la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$.