CAPÍTULO13: INTEGRAL INDEFINIDA

SUMARIO:

INTRODUCCIÓN

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

PARTE TEÓRICA DEL TEMA :

13.1.- Función primitiva. Integral definida.

13.2.- Integración y diferenciación.

13.3.- Integrales inmediatas.

13.4.- Linealidad de la integral indefinida.

13.5.- Métodos o técnicas de integración.

13.5.1.- Integración por sustitución o cambio de variable.

13.5.2.- Integración por partes.

13.5.3.- Integrales racionales. Método de Hermite.

13.5.4.- Integrales irracionales.

13.5.5.- Integrales de algunas funciones trascendentes.

PROBLEMAS RESUELTOS

INTRODUCCIÓN

El cálculo de integrales indefinidas es una práctica constante no solo en asignaturas de Matemáticas que debe cursar un alumno de Ingeniería sino que, además, aparece frecuentemente en el estudio de otras materias, generales como la Física, o más específicas como cualquier Tecnología.

Así, por ejemplo, es imposible manejar la Integración Múltiple o la resolución de Ecuaciones diferenciales ordinarias sin un amplio bagaje en la determinación de primitivas. Asimismo, son variados los problemas como determinación de Centros de Gravedad o Momentos de inercia, Trabajo realizado por una fuerza, etc..., donde es imprescindible la utilización del cálculo integral.

Definiremos el concepto de función primitiva, resaltando la circunstancia de la existencia de infinitas primitivas de una función dada que se diferencian en una constante. Aprovechando las reglas de derivación construiremos un cuadro de integrales inmediatas para su utilización por el alumno.

Destacaremos que, ni mucho menos, todas las funciones admiten primitivas expresables mediante funciones elementales. Intentaremos crear una metodología en la determinación de estas primitivas dando los pasos a seguir para cada uno de los tipos más frecuentes de integración que se nos pueda presentar.

Así, comentaremos los casos más usuales en la aplicación de la integración por partes como producto de polinomios por exponenciales, exponenciales por trigonométricas, polinomios por logaritmos,...,etc. Dado que las integrales racionales son muy metódicas en su resolución bastaría un ejercicio de cada tipo para que el alumno adquiera el conocimiento necesario. Las integrales irracionales y las trascendentes se resuelven en los casos generales transformándolas en racionales. De todas formas, comentaremos algunos casos particulares en que no es necesaria esta racionalización, dando el método más apropiado para su cálculo. Haremos notar al alumno que, en general, las integrales indefinidas no se resuelven mediante ”ideas felices”, sino aplicando esos métodos ya estudiados que nos permiten hacerlo por la vía más segura y, casi siempre, más rápida.

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Repasar el concepto de función primitiva y el cuadro de integrales inmediatas, completándolo con las funciones hiperbólicas y sus inversas.
- Destacar al alumno el concepto de integración como función inversa de la diferenciación.
- Conocer los métodos generales de integración adquiriendo cierta metodología en la determinación de primitivas de funciones elementales.
- Aprovechar las operaciones necesarias en la determinación de primitivas para reforzar en el alumno conocimientos de matemáticas elementales como trigonometría u operaciones con logaritmos.

13.1. FUNCIÓN PRIMITIVA. INTEGRAL INDEFINIDA.

Se dice que la función $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en un intervalo I, si $F'(x) = f(x), \ \forall x \in I$. En este caso, se cumplirá también que $\left[F(x)+c\right]' = f(x)$, por lo que si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ también lo será $F(x)+c, \ \ \forall x \in R$.

Al conjunto de las infinitas primitivas de $f(x)$, le llamaremos integral indefinida de $f(x)$, y escribiremos en forma simbólica $\int f(x)dx = F(x)+c$.

13.2. Integración y diferenciación

Tal como hemos definido la integral indefinida, la integración resulta ser la "operación inversa" de la diferenciación.

Efectivamente,

$$df\left(x\right)dx = d\left[F\left(x\right)+c\right] = \left[F\left(x\right)+c\right]'dx = f\left(x\right)dx$$

$$dF\left(x\right) = F'\left(x\right)dx = f\left(x\right)dx = F\left(x\right)+c$$

13.3. Integrales inmediatas

Recurriendo a la definición anterior y aplicando las reglas de derivación se obtiene el siguiente cuadro de funciones primitivas de otras funciones dadas. Por la evidencia de su cálculo, se llaman integrales inmediatas.

[1] $$\int f'\left(x\right)\left[f\left(x\right)\right]^n dx = \frac{\left[f\left(x\right)\right]^{n+1}}{n+1}+c\,,\quad \text{para } n \neq -1$$

[2] $$\int \frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}dx = ln\,|\,f\left(x\right)|+c$$

[3] $$\int f'\left(x\right)a^{f(x)}dx = \frac{a^{f(x)}}{lna}+c\,,\quad \text{para } a>0,\ \ a\neq 1$$

[4] $$\int f'\left(x\right)cosf\left(x\right)dx = senf\left(x\right)+c$$

[5] $$\int f'\left(x\right)senf\left(x\right)dx = -cosf\left(x\right)+c$$

[6] $$\int \frac{f'\left(x\right)}{cos^2 f\left(x\right)}dx = tgf\left(x\right)+c$$

[7] $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{sen^2 f(x)}dx = -cotgf(x) + c$

[8] $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}dx = arcsenf(x) + c$

[9] $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = arctgf(x) + c$

[10] $\displaystyle\int f'(x)chf(x)dx = shf(x) + c$

[11] $\displaystyle\int f'(x)shf(x)dx = chf(x) + c$

[12] $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{ch^2 f(x)}dx = thf(x) + c$

[13] $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{sh^2 f(x)}dx = -cothf(x) + c$

[14] $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2+1}}\,dx = argshf(x) + c = \ln\left[f(x) + \sqrt{[f(x)]^2+1}\right] + c$

[15]

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-1}}\,dx = ln\left[f(x) + \sqrt{[f(x)]^2-1}\right] + c = \arg chf(x) + c$$

, para $f(x) > 1$

[16] $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-1}}\,dx = ln\left[-f(x) - \sqrt{[f(x)]^2-1}\right] + c\,,\ \ f(x) < -1$

[17] $\int \frac{f'(x)}{1-\left[f(x)\right]^2}dx = \frac{1}{2}ln\left|\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right| + c$, para $f(x) \neq 1$

[17] Bis $\int \frac{f'(x)}{1-\left[f(x)\right]^2}dx = \arg thf(x)$, para $\left|f(x)\right| < 1$

<u>Observaciones:</u>

Se supone la validez de estas igualdades para los valores de x pertenecientes al dominio de las funciones a integrar.

Se pueden obtener otras expresiones paralelas para el caso particular que $f(x) = x$, y, obviamente, $f'(x) = 1$.

Asimismo, se puede ampliar la relación anterior aplicando las reglas de derivación para otras formas funcionales.

13.4. LINEALIDAD DE LA INTEGRAL INDEFINIDA.

Siendo $f(x)$ y $g(x)$ funciones que admiten primitiva y k una constante, se verifica:

$$\int \left[f(x) + g(x)\right]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

Estas propiedades nos permiten, si nos conviene, descomponer una integral en suma de otras integrales, que pueden ser más elementales que la inicial.

13.5. MÉTODOS O TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN.

13.3.1. Integración por sustitución o cambio de variable

Consiste en sustituir x por una cierta función de una nueva variable, t, de tal forma que resulte otra integral más sencilla de resolver.

Así, supuesto $f(x)$ contínua en $[a,b]$, sustituiremos en $\int f(x)dx$, la expresión adecuada, $x = g(t)$, siendo $g(t)$ derivable con derivadas continuas en $[a_1, b_1]$ y $g[a_1, b_1] \subset [a,b]$. Quedará,

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt = \int H(t)dt = \int F(t) + c.$$

Para expresar la primitiva en función de la variable x, sustituiremos $t = g^{-1}(x)$ (inversa de $g(x)$ que debe existir).

5.2. Integración por partes

Tiene por objeto transformar una integral en otra más sencilla, aplicando una expresión deducida a partir de la diferenciación de un producto de funciones.

Sean $u = u(x)$, $v = v(x)$, funciones continuas con derivada continua en un intervalo I. Diferenciando,

$d(uv) = udv + vdu$, despejando,

$udv = d(uv) - vdu$, integrando,

$udv = uv - vdu$

El método consiste en expresar la función subintegral como producto de los factores u y dv, de tal forma que la nueva integral $\int vdu$ sea más fácil.

Es útil en múltiples casos. Enumeraremos algunos de ellos:

$\int P(x) lnQ(x) dx$; $\quad P(x), Q(x)$ polinomios en x

$\int P(x) e^{kx} dx$; $\quad k \in R$

$\int P(x) senkxdx, \qquad \int P(x) coskxdx$

$\int e^{kx} senkxdx, \qquad \int e^{kx} coskxdx$

$\int P(x) arcsenxdx, \qquad \int P(x) arccosxdx$

$\int P(x) arctgxdx$

5.3. INTEGRALES RACIONALES

Son las integrales del tipo $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios en x.

Si el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el de $Q(x)$ se efectúa la división,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

quedando reducida la integral inicial a la de un polinomio más una integral racional donde el grado del numerador, $R(x)$, es menor que el grado del denominador $Q(x)$. Sólo consideraremos, entonces, integrales de este último tipo.

Para resolver esta, descompondremos $\frac{R(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples lo que equivaldrá a sustituir la integral inicial por una suma de integrales más elementales.

5.3.1. Descomposición en fracciones simples

La descomposición depende de la naturaleza de las raíces de $Q(x)=0$.

5.3.1.1. Raíces reales (simples y múltiples)

Supongamos que a, b y c son las raíces de la ecuación $Q(x)=0$, de órdenes respectivos de multiplicidad 1, α y β. La descomposición resultaría,

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\cdots+\frac{B_\alpha}{(x-b)^\alpha}+\frac{C_1}{x-c}+\frac{C_2}{(x-c)^2}+\cdots+\frac{C_\alpha}{(x-c)^\alpha}$$

5.3.1.2. Raíces complejas simples

Sean $(r \pm si)$ las raíces complejas conjugadas de $Q(x)=0$. En principio, la descomposición sería,

$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-(r+si)}+\frac{A_2}{x-(r-si)}$, con A_1, A_2 $\in C$ (Cuerpo de los números complejos). Operando quedaría,

$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{(x-r)^2+s^2}$ con M , N $\in R$

Fracciones similares se plantearían para cada pareja de raíces complejas conjugadas. En caso de existir raíces reales y complejas, la descomposición sería la suma de las fracciones correspondientes a ambos tipos. Para calcular los coeficientes de los numeradores se quitan denominadores y se identifican los dos polinomios del primer y segundo miembro, tal como se detallará en los ejercicios resueltos. En el caso que $Q(x)=0$ admita raíces complejas múltiples, no procederemos a la descomposición y aplicaremos un método de integración que trataremos en el siguiente apartado.

5.3.2. Integración de las fracciones simples

5.3.2.1. Fracciones correspondientes a raíces reales simples

$$\rightarrow \int \frac{A}{x-a}dx = Aln\left|x-a\right| + C \quad \text{(Inmediata)}$$

5.3.2.2. Fracciones correspondientes a raíces reales múltiples

$$\int \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}dx = A_\alpha \frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + C = \frac{A_\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}} + C \quad \text{(Inmediata)}$$

5.3.2.3. Fracciones correspondientes a raíces complejas simples

Para integrar $\int \frac{Mx+N}{(x-r)^2+s^2}dx$, una vez hallados los coeficientes, la descompondremos en dos integrales inmediatas, una de tipo logarítmico y otra de tipo arco tangente. La metodología se detallará en los ejercicios prácticos y la expresión final queda,

$$\int \frac{Mx+N}{(x-r)^2+s^2}dx = \frac{M}{2}ln\left[(x-r)^2+s^2\right] + \frac{Mr+N}{s}arctg\frac{x-r}{s} + C$$

5.3.3. Método de Hermite

Se aplica cuando $Q(x)=0$ tiene raíces complejas múltiples en la integral $\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$.

Se podría demostrar, para este caso, que la fracción racional se podría descomponer en la forma,

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{d}{dx}[\frac{f(x)}{g(x)}]+\frac{R_1(x)}{Q_1(x)}$$

En esta expresión, $g(x)$ es un polinomio con las mismas raíces que $Q(x)$ rebajando en una unidad, respectivamente, sus órdenes de multiplicidad, (se podría obtener, pues, como el m.c.d. de $Q(x)$ y $Q'(x)$) y $f(x)$ es un polinomio de coeficientes indeterminados de grado inferior en una unidad al grado de $g(x)$.

La expresión $\frac{R_1(x)}{Q_1(x)}$ se descompondría en fracciones considerando como raíces de $Q_1(x)=0$ las mismas que las de $Q(x)=0$, pero con orden de multiplicidad, para todas ellas, igual a la unidad. Es decir,

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{d}{dx}[\frac{f(x)}{g(x)}]+\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{(x-r_1)^2+s_1^2}+\cdots$$

Derivando e identificando polinomios se obtendrían los coeficientes indeterminados. Integrando cada sumando,

$$\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx=\int\frac{d}{dx}[\frac{f(x)}{g(x)}]dx+\int\frac{A_1}{x-a_1}dx+\int\frac{A_2}{x-a_2}dx+\cdots+\int\frac{M_1x+N_1}{(x-r_1)^2+s_1^2}dx+\cdots$$

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx = \frac{f(x)}{g(x)} + \int \frac{A_1}{x-a_1}dx + \int \frac{A_2}{x-a_2}dx + \cdots + \int \frac{M_1 x + N_1}{(x-r_1)^2 + s_1^2}dx + \cdots \quad ,$$

integrales del mismo tipo que las que figuraban en las integrales racionales anteriores, y que ya hemos resuelto.

5.4. INTEGRALES IRRACIONALES

En general, las primitivas de las funciones irracionales no pueden expresarse mediante funciones elementales. Consideremos, en este apartado, algunos tipos en los que si es posible encontrar una función primitiva. El procedimiento general consistirá en transformarlas en integrales racionales realizando los cambios de variable adecuados.

5.4.1. Integrales del tipo $\int R[x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_1}{q_1}}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_2}{q_2}}, \cdots]dx$

En esta expresión suponemos que R denota una función racional y que $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}, \cdots$, son números racionales. Supondremos, además, que $ad \neq cd$, pues, en otro caso, la fracción $\frac{ax+b}{cx+d}$ se reduciría a una fracción numérica. Hallando el m.c. m. de los denominadores de los exponentes $(q_1, q_2, \cdots)$, al que llamaremos λ y haciendo el cambio de variable $\frac{ax+b}{cx+d} = t^{\lambda}$, la integral se transforma en una racional.

5.4.2. Integrales binomias

Son las integrales de la forma $\int x^m (ax^n + b)^p \, dx$ donde m , n y p son números racionales.

Haciendo el cambio $x^n = t$, con la finalidad de transformar el paréntesis en un binomio de primer grado, la integral se convierte en una del tipo $\int t^q (a+bt)^p \, dt$.

Esta integral se racionaliza sólo si es entero uno de los tres números p, q, $p+q$.

- Si $p \in N$, se desarrolla el binomio y se quita el paréntesis, transformándose en una suma de integrales inmediatas.

- Si p es un entero negativo y $q = \frac{r}{s}$, efectuaríamos el cambio de variable $t = z^s$ y se convertiría en una integral racional.

- Si q es entero y $p = \frac{r}{s}$, estamos en el caso analizado en el apartado anterior y haríamos el cambio $(a+bt) = z^s$.

- Si $p+q$ es entero, multiplicando y dividiendo por t^p,

$$\int t^q (a+bt)^p \, dt = \int t^{p+q} \left(\frac{a+bt}{t} \right)^p dt$$

y volveríamos a tener una integral del primer tipo estudiado de las integrales irracionales, que se racionaliza mediante el cambio $\frac{a+bt}{t} = z^s$ siendo $p = \frac{r}{s}$.

5.4.3. Integrales del tipo $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

Igual que en casos anteriores R representa una función racional. Se pueden resolver racionalizándolas, convirtiéndolas en otras integrales irracionales conocidas o recurriendo a cambios trigonométricos. Aunque nos parece más metódico y seguro el segundo camino, comentaremos también el método de racionalización.

5.4.3.1. Integración por racionalización

Consiste en efectuar un cambio de variable que nos permita despejar x como una expresión racional de esta nueva variable.

1^o - Si $a>0$, haremos $\sqrt{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}}=\sqrt{a}\,x+t$

2^o - Si $c>0$, haremos $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx+\sqrt{c}$

3^o - Si $a<0$ y $c<0$, haremos $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha)$, siendo α una raíz de $ax^2+bx+c=0$.

5.4.3.2. Integración por reducción

Dada la integral irracional $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, efectuando operaciones que consisten generalmente en:

- Multiplicar y dividir por el conjugado de alguna expresión
- Multiplicar y dividir por $\sqrt{ax^2+bx+c}$
- Descomponer en fracciones simples la parte racional de la integral

la transformaremos en los tipos:

(I) $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^p \sqrt{ax^2+bx+c}}$ con $p \in N$

(II) $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$, siendo $P(x)$ un polinomio en x.

La integral (I) se transforma en la del tipo (II) mediante el cambio $x-\alpha = \frac{1}{t}$, y esta última la resolveremos por el llamado Método Alemán.

Este Método consiste en descomponer la función subintegral de la forma,

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{d}{dx}\left[f(x)\sqrt{ax^2+bx+c} \right] + \frac{A}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

donde $f(x)$ es un polinomio de coeficientes indeterminados de grado inferior en una unidad al de $P(x)$.

Derivando e identificando polinomios se obtienen los coeficientes indeterminados. Integrando a continuación,

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = f(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{A}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

Sólo tendríamos que resolver $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ que es del tipo $arcsenx$, $argshx$ o $argchx$, como veremos en los ejercicios.

5.4.4. Integrales del tipo $\int R(x, \sqrt{a \pm bx^2}) dx$

Estas integrales, en particular, son del tipo anterior y se podrían resolver por racionalización o por reducción, pero, asimismo, resultan adecuados determinados cambios que detallamos a continuación.

- Para $\int R(x,\sqrt{a-bx^2})dx$, con $a, b>0$, haremos $x=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}sent$ o $x=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}cost$.

- Para $\int R(x,\sqrt{a+bx^2})dx$, con $a, b>0$, haremos $x=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}tgt$ o $x=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}sht$.

Los cambios efectuados transforman estas integrales en otras más sencillas, como veremos en los ejercicios resueltos.

5.5. INTEGRALES DE ALGUNAS FUNCIONES TRASCENDENTES

5.5.1. Integrales del tipo $\int R(a^x)dx$

El cambio $a^x=t$ la transforma en una integral racional.

5.5.2. Integrales del tipo $\int R(senx, cosx)dx$

Recordemos que R denota una expresión racional en $senx$ y $cosx$.Los cambios que convierten esta integral en una racional, dependiendo de la función subintegral, son los siguientes:

- Si $R(senx, cosx)$ es impar en $cosx$, es decir, al sustituir $cosx$ por $(-cosx)$, la expresión cambia de signo, haremos $senx=t$.

◦ Si $R(senx, cosx)$ es impar en $senx$, es decir, al sustituir $senx$ por $(-senx)$, la expresión cambia de signo, haremos $cosx = t$.

◦ Si $R(senx, cosx)$ es par en $(senx, cosx)$, es decir, al sustituir simultáneamente $senx$ por $(-senx)$ y $cosx$ por $(-cosx)$ la función no cambia, haremos $tgx = t$. En este caso deberemos expresar $senx$ y $cosx$ en función de tgx:

$$senx = \frac{1}{cosecx} = \frac{1}{\sqrt{1+cotg^2 x}} = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$cosx = \frac{1}{secx} = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Puede suceder que una expresión pertenezca a dos o a los tres tipos anteriores. En este caso, es aconsejable utilizar uno de los dos primeros cambios y recurrir al tercero sólo en el caso que estos no fueran factibles, ya que las integrales racionales a las que conducen aquellos son, en general, menos complicadas que utilizando $tgx = t$.

◦ Si la expresión $R(senx, cosx)$ no fuese ni impar en $senx$, ni impar en $cosx$, ni par en $(senx, cosx)$, recurriríamos al cambio general $tg\frac{x}{2} = t$.

Este cambio se podría aplicar en cualquier caso, pero normalmente da lugar a integrales racionales con polinomios de grado más elevado que utilizando otro de los señalados.

Habría que expresar $senx$ y $cosx$ en función de $tg\frac{x}{2}$:

$$senx = sen2\frac{x}{2} = 2sen\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} = \frac{2sen\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{sen^2\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$cosx = cos2\frac{x}{2} = cos^2\frac{x}{2} - sen^2\frac{x}{2} = \frac{cos^2\frac{x}{2}-sen^2\frac{x}{2}}{sen^2\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

5.5.3. Integración de productos de senos y cosenos de argumentos distintos

Son las integrales de la forma,

$\int senax\,senbxdx$, $\int senax\cos bxdx$, $\int cosax\cos bxdx$.

Se resuelven transformando el producto en sumas o diferencias mediante identidades trigonométricas. Así, por ejemplo, utilizando las igualdades:

$$sen\ (ax+bx) = senax\ \ cosbx + \ cosax\ \ senbx$$

$$sen\ (ax-bx) = senax\ \ cosbx - \ cosax\ \ senbx$$

Sumando y despejando,

$$senax\cos bx = \frac{1}{2}[sen(ax+bx)+sen(ax-bx)]$$

integrando,

$$\int senax\cos bxdx = \frac{1}{2}[-\frac{\cos(ax+bx)}{a+b} - \frac{\cos(ax-bx)}{a-b}] + C$$

Las restantes integrales se resolverían de forma similar