Tema 11

Integrales impropias.

11.1 Introducción.

En el tema anterior se ha definido la integral de Riemann con las siguientes hipótesis

- ⋆ $\mathrm{Dom}(f) = [a,b]$ es un conjunto acotado.
- ⋆ $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ está acotada en $[a,b]$.

Si alguna de estas condiciones no se cumple denominaremos a la integral correspondiente **integral impropia**.

11.2 Integrales impropias de primera especie.

Definición 11.1 – *Sea $f\colon [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[a,t]$, para todo $t \geq a$, y sea $F\colon [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $F(t) = \int_a^t f(x)dx$.*

El par (f,F) se denomina **integral impropia de primera especie** *en $[a,+\infty)$ y se designa por*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{ó} \quad \int_a^{+\infty} f.$$

Definición 11.2 – *Diremos que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es* **convergente** *si existe y es finito*

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx$$

y si ese límite es L se dice que el valor de la integral impropia es L. Es decir,

$$L = \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Si el límite anterior es infinito se dice que la integral impropia es **divergente**, *y si no existe se dice que es* **oscilante**.

De forma análoga se definen las integrales impropias de primera especie en intervalos de la forma $(-\infty,b]$ para funciones $f\colon (-\infty,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables en $[t,b]$, para todo $t \in \mathbb{R}$, y las representamos por

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx \quad \text{ó} \quad \int_{-\infty}^b f.$$

Definición 11.3 – *Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en todo intervalo cerrado de $\mathbb{R}$. Diremos que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ es convergente si existe algún $a \in \mathbb{R}$ tal que las integrales*

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx \quad y \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

son ambas convergentes. En ese caso su valor es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

Definición 11.4 – *Diremos que dos integrales impropias tienen el* **mismo carácter***, y lo representaremos por "$\sim$", si son simultáneamente convergentes, divergentes u oscilantes.*

Propiedades 11.5 –

a) Sea $f\colon [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[a,t]$ para todo $t \geq a$ y sea $b \geq a$. Entonces

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \sim \int_{b}^{+\infty} f(x)dx.$$

Demostración:

Como

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{t} f(x)dx\right) = \int_{a}^{b} f(x)dx + \lim_{t\to+\infty}\int_{b}^{t} f(x)dx$$

el límite de la izquierda es finito, infinito o no existe si el límite de la derecha es finito, infinito o no existe respectivamente. Y viceversa. ■

Análogamente si $f\colon (-\infty,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en $[t,b]$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ y $a \leq b$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \sim \int_{-\infty}^{a} f(x)dx.$$

b) Sean $f,g\colon [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables en $[a,t]$, $\forall\, t \geq a$. Si $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ y $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ convergen, entonces $\displaystyle\int_{a}^{+\infty}(f+g)(x)dx$ converge. En cuyo caso,

$$\int_{a}^{+\infty}(f+g)(x)dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} g(x)dx.$$

Demostración:

Basta considerar que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t}(f+g)(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)dx + \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} g(x)dx$, si los segundos límites existen. ■

c) Sea $f\colon [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[a,t]$, $\forall\, t \geq a$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, con $\lambda \neq 0$. Entonces

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \sim \int_{a}^{+\infty} \lambda f(x)dx.$$

Demostración:

Como $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t}\lambda f(x)dx = \lambda \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)dx$, ambos límites son simultáneamente finitos, infinitos o no existen. ■

Observaciones:

a) Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en todo intervalo cerrado de $\mathbb{R}$. El carácter de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ no depende del punto a dado en la definición.

En el caso de que la integral sea convergente su valor no depende tampoco del punto elegido ya que, para cualquier $b \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{a} f + \int_{a}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{b} f + \int_{b}^{a} f + \int_{a}^{b} f + \int_{b}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{b} f + \int_{b}^{\infty} f.$$

b) Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en todo intervalo cerrado de $\mathbb{R}$. Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f$ es convergente, entonces $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} f$.

La implicación contraria es falsa. Es decir, puede existir el límite y la integral ser divergente.

Contraejemplo.- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2xdx$ no es convergente, pues

$$\int_0^{\infty} 2xdx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t 2xdx = \lim_{t\to+\infty} x^2\Big]_0^t = \lim_{t\to+\infty} t^2 = +\infty$$

es divergente, sin embargo

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} 2xdx = \lim_{t\to+\infty} x^2\Big]_{-t}^{t} = \lim_{t\to+\infty} t^2 - (-t)^2 = 0.$$

Al valor del $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} f(x)dx$ se le denomina Valor Principal de Cauchy, y suele denotarse por $VP\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$.

Ejemplo 11.6 – Estudiar el carácter de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$, para $\alpha \in \mathbb{R}$.

<u>*Solución:*</u>

Como la función tiene primitivas distintas para $\alpha = 1$ y $\alpha \neq 1$, las estudiamos por separado:

Si $\alpha = 1$,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to+\infty} \ln x\Big]_1^t = \lim_{t\to+\infty} (\ln t - \ln 1) = \lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty,$$

luego diverge.

Si $\alpha \neq 1$,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t x^{-\alpha}dx = \lim_{t\to+\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)$$
$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}(t^{1-\alpha} - 1) = \begin{cases} \frac{-1}{1-\alpha}, & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty, & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

luego diverge si $\alpha < 1$ y converge si $\alpha > 1$.

Resumiendo, $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ diverge si $\alpha \leq 1$ y converge si $\alpha > 1$. En este último caso,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Proposición 11.7 – *Sea* $f\colon [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$*, integrable en* $[a,t]$ *para todo* $t \in [a,+\infty)$*. Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \neq 0$ *entonces* $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ *diverge.*

Demostración:

Supongamos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L > 0$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $k > 0$ tal que si $x \geq k$ se verifica que $|f(x) - L| < \varepsilon$, es decir, $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

En particular, tomando $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$, si $x \geq k$ se verifica que $\frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2}$, luego $0 < \frac{L}{2} < f(x)$ para todo $x \in [k,+\infty)$. Entonces,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_k^t \frac{L}{2} dx \leq \lim_{t\to+\infty} \int_k^t f(x)dx$$

y como

$$\lim_{t\to+\infty} \int_k^t \frac{L}{2} dx = \lim_{t\to+\infty} \frac{L}{2}\, x]_k^t = \frac{L}{2} \lim_{t\to+\infty} t - k = +\infty,$$

se tiene que $\lim\limits_{t\to+\infty} \displaystyle\int_k^t f(x)dx = +\infty$ y la integral $\displaystyle\int_k^\infty f(x)dx$ diverge, luego por la propiedad 1 de 11.5 anterior, $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.

Supongamos ahora que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L < 0$. Entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} -f(x) = -L > 0$ y, por tanto, $\displaystyle\int_a^\infty - f(x)dx$ diverge. Luego $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ diverge. ∎

Observación 11.8 – Como consecuencia de este resultado, si una función tiene límite en $+\infty$, su integral sólo puede ser convergente cuando el límite es cero. (Si el límite no existe no se puede asegurar nada.)

El recíproco de la proposición 11.7 no es cierto, una integral puede ser divergente, aunque su límite sea 0.

Contraejemplo.- $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ diverge (ver ejemplo 11.6) y sin embargo, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

11.2.1 Criterios de comparación para funciones no negativas.

Lema 11.9 – Sea $f\colon [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable y no negativa en $[a,t]$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Entonces la función $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)dx$ es creciente en $[a,+\infty)$.

Demostración:

La función F es creciente ya que si $t_1, t_2 \in [a,+\infty)$, con $t_1 \leq t_2$, entonces

$$F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \geq 0$$

por ser $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,+\infty)$. ∎

Teorema 11.10 – *Sea* $f\colon [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrable y no negativa en* $[a,t]$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \textit{es convergente} \iff F(t) = \int_a^t f(x)dx \quad \textit{está acotada superiormente.}$$

Demostración:

Si $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge, entonces

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} F(t) = L \in \mathbb{R}.$$

Como $F(t)$ es creciente, $F(t) \leq L$ y está acotada superiormente.

Recíprocamente, si $F(t)$ está acotada superiormente existe $\sup\{F(t) : t \in [a,+\infty)\} = \alpha \in \mathbb{R}$. Veamos que $\alpha = \lim_{t\to+\infty} F(t)$ y habremos probado que $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ es convergente.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, por ser α un extremo superior, existe $t' \in [a,+\infty)$ tal que $\alpha - \varepsilon < F(t')$, luego si $t \geq t'$, como F es creciente, se tiene que $\alpha - \varepsilon < F(t') \leq F(t)$. Además, para todo t, se verifica que $F(t) \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$.

En consecuencia, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe t' tal que si $t \geq t'$, $\alpha - \varepsilon < F(t) < \alpha + \varepsilon$, es decir, $|F(t) - \alpha| < \varepsilon$, luego $\lim_{t\to+\infty} F(t) = \alpha$. ■

Observación:

A la vista del resultado anterior, para funciones no negativas, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ sólo puede ser convergente o divergente.

Primer criterio de comparación 11.11 – *Sean* $f, g\colon [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrables en* $[a,t]$ *para todo* $t \geq a$ *y supongamos que existe* $b > a$ *tal que* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \geq b$. *Entonces:*

a) Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *converge* $\Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *también converge.*

b) Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *diverge* $\Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *también diverge.*

Demostración:

Por la propiedad 1 de 11.5,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \sim \int_b^{+\infty} f(x)dx \qquad \text{y} \qquad \int_a^{+\infty} g(x)dx \sim \int_b^{+\infty} g(x)dx,$$

luego basta probarlo en $[b,+\infty)$.

a) Si $\displaystyle\int_b^{+\infty} g(x)dx$ converge, $G(t) = \displaystyle\int_b^t g(x)dx$ está acotada superiormente.

Por ser $0 \leq f(x) \leq g(x)$, se tendrá que

$$F(t) = \int_b^t f(x)dx \leq \int_b^t g(x)dx = G(t),$$

luego $F(t)$ está acotada superiormente y $\displaystyle\int_b^{+\infty} f(x)dx$ es convergente.

b) Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es divergente también lo es $\displaystyle\int_b^{+\infty} f(x)dx$ y, por tanto, $F(t) = \displaystyle\int_b^t f(x)dx$ no está acotada superiormente. Como $F(t) \leq G(t)$, G no está acotada superiormente y $\displaystyle\int_b^{+\infty} g(x)dx$ es divergente, luego $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ es divergente. ■

Segundo criterio de comparación 11.12– *Sean* $f, g\colon [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrables en* $[a,t]$, *para todo* $t \geq a$ *y no negativas. Supongamos que existe* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. *Entonces:*

a) *Si* $0 < L < +\infty \implies \int_a^{+\infty} f(x)dx \sim \int_a^{+\infty} g(x)dx$.

b) *Si* $L = 0$, *se tiene:*

   (i) *si* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *converge* $\implies \int_a^{+\infty} f(x)dx$ *converge.*

   (ii) *si* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *diverge* $\implies \int_a^{+\infty} g(x)dx$ *diverge.*

c) *Si* $L = +\infty$, *se tiene:*

   (i) *si* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *converge* $\implies \int_a^{+\infty} g(x)dx$ *converge.*

   (ii) *si* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *diverge* $\implies \int_a^{+\infty} f(x)dx$ *diverge.*

Demostración:

a) Si $0 < L < +\infty$, tomamos $\varepsilon = \frac{L}{2}$, luego existe $K > 0$ tal que si $x \geq K$ se tiene que $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \frac{L}{2}$. De donde
$$-\frac{L}{2} + L < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{L}{2} + L$$
y, como $g(x) \geq 0$, se tiene
$$\frac{L}{2} g(x) \leq f(x) \leq \frac{3L}{2} g(x)$$
para todo $x \geq K$. Basta aplicar 11.11, a los pares de funciones $\frac{L}{2} g \leq f(x)$ y $f(x) \leq \frac{3L}{2} g(x)$ y tener en cuenta la propiedad 3 de 11.5.

b) Si $L = 0$, tomando $\varepsilon = 1$, se tiene que existe $K > 0$ tal que si $x \geq K$ entonces $0 \leq f(x) < g(x)$.

   De nuevo, basta con aplicar 11.11.

c) Si $L = +\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ y recaemos en el caso anterior. ∎

Observación:
Aunque los criterios dados son válidos únicamente para funciones positivas en un entorno de $+\infty$, teniendo en cuenta que $\int_a^{+\infty} f(x)dx \sim \int_a^{+\infty} -f(x)dx$, para las funciones negativas basta estudiar el carácter de $\int_a^{+\infty} -f(x)dx$.

11.2.2 Convergencia absoluta.

Definición 11.13– *Sea* $f\colon [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrable en* $[a,t]$ *para todo* $t \geq a$. *Diremos que* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *es* **absolutamente convergente** *si* $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *converge.*

Teorema 11.14 – *Sea $f\colon [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[a,t]$ para todo $t \geq a$.*

$$\text{Si } \int_a^{\infty} |f(x)|dx \text{ converge, entonces } \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ converge.}$$

En otras palabras, si una integral impropia converge absolutamente entonces converge.

Demostración:

Para todo $x \in [a,+\infty)$ se tiene $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, luego $0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$. Entonces, si $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ converge se tiene que $\int_a^{+\infty} (|f(x)| + f(x))\,dx$ es convergente y, por tanto, aplicando al propiedad 2 de 11.5, se tiene que

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)\,dx - \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

converge. ■

Nota: El recíproco no es cierto.

Contraejemplo.- $\int_\pi^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$ converge pero no converge absolutamente.

Veamos que $\int_\pi^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$ converge.

$$\int_\pi^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \lim_{t\to+\infty} \int_\pi^t \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = \frac{1}{x} \\ dv = \operatorname{sen} x dx \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} du = \frac{-1}{x^2}dt \\ v = -\cos x \end{array} \right\} \longrightarrow$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(\left. \frac{-\cos x}{x} \right]_\pi^t - \int_\pi^t \frac{\cos x}{x^2}dx \right) = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{-\cos t}{t} \right) - \lim_{t\to+\infty} \int_\pi^t \frac{\cos x}{x^2}dx$$

$$= \frac{1}{\pi} - \int_\pi^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$$

Como $\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ y $\int_\pi^\infty \frac{1}{x^2}dx$ converge, $\int_\pi^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$ converge absolutamente, luego converge y, por tanto

$$\int_\pi^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \frac{1}{\pi} - \int_\pi^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$$

converge.

Veamos que no converge absolutamente. Si $\int_\pi^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}dx$ convergiera, entonces $\int_\pi^\infty \frac{|\cos x|}{x}dx$ convergería, puesto que

$$\int_\pi^\infty \frac{|\cos x|}{x}dx = \int_\pi^\infty \frac{|\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{2})|}{x}dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^\infty \frac{|\operatorname{sen}(t)|}{t-\frac{\pi}{2}}dt \sim \int_\pi^\infty \frac{|\operatorname{sen} t|}{t}dt$$

(por el segundo criterio de comparación); en consecuencia, $\int_\pi^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|+|\cos x|}{x}dx$ convergería. Pero esto es absurdo puesto que $\frac{|\operatorname{sen} x|+|\cos x|}{x} \geq \frac{1}{x}$ y como $\int_\pi^\infty \frac{1}{x}dx$ diverge, necesariamente $\int_\pi^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|+|\cos x|}{x}dx$ ha de ser divergente.

Luego $\int_\pi^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}dx$ diverge y $\int_\pi^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$ no converge absolutamente.

Observación 11.15 – Los criterios establecidos para integrales impropias de primera especie en $[a,+\infty)$ así como la convergencia absoluta admiten versiones análogas para integrales impropias de primera especie en $(-\infty,b]$. Ver sección 11.3.1.

No obstante, si $f\colon(-\infty,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, la función $g\colon[-b,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x)=f(-x)$ verifica que $\int_t^b f(x)dx = \int_{-b}^{-t} g(u)du$, para todo $t\in(-\infty,b]$, luego

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \sim \int_{-b}^{\infty} g(u)du.$$

Puede, por tanto, estudiarse $f(x)$ en $(-\infty,b]$ estudiando $f(-x)$ en $[-b,+\infty)$.

Ejemplo.- Estudiar el carácter de $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx$.

Como $\int_{-(-1)}^{+\infty} \frac{1}{(-x)^2}dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ que converge, la integral $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx$ converge.

11.3 Integrales impropias de segunda especie.

Definición 11.16 – *Sea $f\colon(a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[t,b]$, para todo $t\in(a,b]$, y no acotada. Sea $F\colon(a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $F(t)=\int_t^b f(x)dx$.*

El par (f,F) se denomina **integral impropia de segunda especie** *en $(a,b]$ y se designa por*

$$\int_{a^+}^{b} f(x)dx \qquad \text{ó} \qquad \int_{a^+}^{b} f.$$

Definición 11.17 – *Diremos que la integral impropia $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ es* **convergente** *si existe y es finito*

$$\lim_{t\to a^+} F(t) = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

y si ese límite es L se dice que el valor de la integral impropia es L, es decir,

$$L=\int_{a^+}^{b} f(x)dx.$$

Si el límite anterior es infinito se dice que la integral impropia es **divergente** *y si no existe se denomina* **oscilante***.*

De forma análoga se definen las integrales impropias de segunda especie en intervalos de la forma $[a,b)$ para funciones $f\colon[a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables en $[a,t]$, $\forall t\in[a,b)$ y no acotadas. Las representaremos por

$$\int_{a}^{b^-} f(x)dx \qquad \text{ó} \qquad \int_{a}^{b^-} f.$$

Definición 11.18 – *Sea $f\colon(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en todo intervalo cerrado contenido en (a,b) y no acotada. Diremos que $\int_{a^+}^{b^-} f(x)dx$ es convergente si existe algún $c\in\mathbb{R}$ tal que las integrales $\int_{a^+}^{c} f(x)dx$ y $\int_{c}^{b^-} f(x)dx$ son ambas convergentes. En ese caso su valor es*

$$\int_{a^+}^{b^-} f(x)dx = \int_{a^+}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b^-} f(x)dx.$$

Ejemplo 11.19 – Estudiar el carácter de $\int_{a^+}^{b} \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ y $\int_a^{b^-} \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, para $\alpha \in \mathbb{R}$.

<u>Solución:</u>

Si $\alpha = 1$,

$$\lim_{t\to a^+} \int_t^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{t\to a^+} \ln|x-a|\Big]_t^b = \lim_{t\to a^+} (\ln|b-a| - \ln|t-a|) = +\infty.$$

Si $\alpha \neq 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to a^+} \int_t^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} &= \lim_{t\to a^+} \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}\Big]_t^b \\ &= \lim_{t\to a^+} \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t-a)^{\alpha-1}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha)(b-a)^{\alpha-1}}, & \text{si } \alpha<1 \\ +\infty, & \text{si } \alpha>1 \end{cases} \end{aligned}$$

luego converge si $\alpha < 1$ y diverge si $\alpha \geq 1$.

Análogamente se hace la segunda, y se obtiene que $\int_a^{b^-} \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ converge si $\alpha < 1$ y diverge si $\alpha \geq 1$.

11.3.1 Criterios de comparación para funciones no negativas.

Las integrales impropias de segunda especie para funciones no negativas, admiten criterios análogos a los dados para las integrales de primera especie. En este sentido, obsérvese que el Teorema 11.21 siguiente es idéntico a su homólogo para integrales de primera especie.

Por ello, enunciaremos los criterios omitiéndo sus demostraciones, que tienen un desarrollo parejo a las demostraciones de los criterios para las integrales de primera especie. Véase la observación 11.25 posterior, que "identifica" las integrales de segunda especie con las de primera especie, donde se aporta más información sobre estos comentarios.

Lema 11.20 – Sea $f\colon (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[t,b]$, para todo $t \in (a,b]$, no negativa y no acotada. Entonces, la función $F(t) = \int_t^b f(x)dx$ es decreciente.

<u>Demostración:</u>

Si $t_1, t_2 \in (a,b]$ con $t_1 \leq t_2$, entonces

$$F(t_1) = \int_{t_1}^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx + \int_{t_2}^b f(x)dx \geq \int_{t_2}^b f(x)dx = F(t_2).$$

■

Teorema 11.21 – *Sea $f\colon (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[t,b]$, para todo $t \in (a,b]$, no negativa y no acotada. Entonces*

$$\int_{a^+}^b f(x)dx \quad \textit{es convergente} \iff F(t) = \int_t^b f(x)dx \quad \textit{está acotada superiormente.}$$

<u>Demostración:</u>

Si $\int_{a^+}^b f(x)dx$ converge, entonces

$$\lim_{t\to a^+} \int_t^b fx dx = \lim_{t\to a^+} F(t) = L \in \mathbb{R}.$$

Como $F(t)$ es decreciente, $F(t) \leq L$ y está acotada superiormente. (Notar, que como F es decreciente, cuando t "decrece" hacia a^+, $F(t)$ "crece" hacia L.)

Recíprocamente, si $F(t)$ está acotada superiormente existe $\sup\{F(t) : t \in (a,b]\} = \alpha \in \mathbb{R}$. Veamos que $\alpha = \lim_{t\to a^+} F(t)$ y habremos probado que $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ es convergente.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, por ser α un extremo superior, existe $t' \in (a,b]$ tal que $\alpha - \varepsilon < F(t')$, luego si $t \leq t'$, como F es decreciente, se tiene que $\alpha - \varepsilon < F(t') \leq F(t)$. Además, para todo t, se verifica que $F(t) \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$.

En consecuencia, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe t' tal que si $t \leq t'$, $\alpha - \varepsilon < F(t) < \alpha + \varepsilon$, es decir, $|F(t) - \alpha| < \varepsilon$, luego $\lim_{t\to a^+} F(t) = \alpha$. ■

Primer criterio de comparación 11.22 – *Sean $f, g\colon (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables en $[t,b]$, para todo $t \in (a,b]$, y no acotadas. Supongamos que existe $c \in (a,b]$ tal que $0 \leq f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in (a,c]$, entonces*

a) Si $\int_{a^+}^{b} g(x)dx$ converge $\Longrightarrow \int_{a^+}^{b} f(x)dx$ también converge.

b) Si $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ diverge $\Longrightarrow \int_{a^+}^{b} g(x)dx$ también diverge.

Segundo criterio de comparación 11.23 – *Sean $f, g\colon (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables en $[t,b]$, para todo $t \in (a,b]$, no negativas y no acotadas. Supongamos que existe y es finito $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Entonces:*

a) Si $L \neq 0$ entonces, $\int_{a^+}^{b} f(x)dx \sim \int_{a^+}^{b} g(x)dx$.

b) Si $L = 0$, se tiene:

(i) Si $\int_{a^+}^{b} g(x)dx$ converge $\Longrightarrow \int_{a^+}^{b} f(x)dx$ también converge.

(ii) Si $\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ diverge $\Longrightarrow \int_{a^+}^{b} g(x)dx$ también diverge.

Teorema 11.24 – *(Convergencia absoluta.)*
Sea $f\colon (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[t,b]$, $\forall t \in (a,b]$, y no acotada.

$$\text{Si} \quad \int_{a^+}^{b} |f(x)|dx \quad \text{convergente} \Longrightarrow \int_{a^+}^{b} f(x)dx \quad \text{es convergente.}$$

Nota: También pueden darse enunciados análogos para integrales impropias de segunda especie en $[a,b)$.

Observación 11.25 – Cualquier integral impropia de segunda especie puede transformarse mediante un cambio de variable adecuado en una integral impropia de primera especie:

Segunda especie	**Cambio de variable**	**Primera especie**
$\int_{a^+}^{b} f(x)dx$	$t = \frac{1}{x-a}$	$\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{f(\frac{1}{t}+a)}{t^2}dt$
$\int_{a}^{b^-} f(x)dx$	$t = \frac{1}{b-x}$	$\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{f(b-\frac{1}{t})}{t^2}dt$

Por consiguiente, como ya anunciábamos, los teoremas y criterios de comparación estudiados para las integrales impropias de primera especie admiten enunciados análogos para las integrales impropias de segunda especie.

Las demostraciones pueden hacerse utilizando los cambios de variable arriba indicados y los resultados ya conocidos referentes a las integrales impropias de primera especie, o bien siguiendo los mismos pasos de las demostraciones realizadas en la subsección 11.2.1.

11.4 Ejercicios.

11.1 Calcular el valor de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

11.2 Calcular $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ y $\int_{-\infty}^{0} e^{x} dx$.

11.3 Estudiar el carácter de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x-1}{1+x^2} dx$ y hallar $VP\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x-1}{1+x^2} dx$.

11.4 Probar que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ diverge para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

11.5 Probar que $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x dx$ no es convergente. ¿Existe $VP\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x dx$?

11.6 Estudiar el carácter de las siguientes integrales, según los valores de a.

a) $\int_a^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx$.

b) $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$, para $a > 1$.

11.7 Responder razonadamente, sobre la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Si $f\colon [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, es integrable en $[a,t]$ para todo $t \in [a,+\infty)$, y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.

b) Si $f\colon [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, es continua y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, entonces $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge.

c) Si $f\colon [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, es derivable, creciente y acotada entonces $\int_a^{\infty} f'(x)dx$ converge.

d) Si $\int_a^{\infty} f(x)dx$ es convergente, entonces $\int_a^{1000} f(x)dx \leq \int_a^{\infty} f(x)dx$.

e) Si $\int_a^{\infty} (f(x)+g(x))dx$ converge, entonces $\int_a^{\infty} f(x)dx$ y $\int_a^{\infty} g(x)dx$ convergen necesariamente.

f) Si $\int_0^1 f(x)dx$ y $\int_0^1 g(x)dx$ convergen, entonces $\int_0^1 f(x)g(x)dx$ converge necesariamente.

11.8 Probar que si f y g son funciones positivas tales que $\int_a^{\infty} f(x)dx$ y $\int_a^{\infty} g(x)dx$ convergen y existe, cuando $x \to \infty$, el límite de una de las funciones, entonces $\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ converge.

11.9 Estudiar el carácter de las integrales siguientes:

a) $\int_0^\infty (2+\operatorname{sen} x)dx$ b) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x}dx$ c) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$

d) $\int_1^\infty \frac{1}{\operatorname{ch} x}dx$ e) $\int_{-\infty}^0 \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$ f) $\int_0^\infty e^{2x}(2x^2-4x)dx$

g) $\int_{-\infty}^0 e^{2x}(2x^2-4x)dx$ h) $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$ i) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos x+e^x}dx$

j) $\int_1^\infty \frac{x}{1+x^4}dx$ k) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ l) $\int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$

m) $\int_0^\infty e^{-x}\operatorname{sen} x dx$ n) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ o) $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

p) $\int_0^\pi \frac{dx}{1-\cos x}$ q) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x-1}dx$ r) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}dx$

11.10 Estudiar el carácter de las integrales siguientes:

a) $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx$ b) $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2}dx$ c) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^4-x^3-x^2+x}dx$

d) $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}}dx$ e) $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$ f) $\int_0^\infty \frac{dx}{x+(x^3+1)^{\frac{1}{2}}}$

g) $\int_1^{+\infty} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}dx$ h) $\int_0^1 \ln x\ln(x+1)dx$ i) $\int_0^\infty \frac{e^x}{e^x+1}dx$.

11.11 Estudiar el carácter de las integrales siguientes:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\operatorname{tg} x)\operatorname{sen} x}{(\frac{\pi}{4}-x)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}}dx$ b) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arcsen} x}{x^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}-x)^{\frac{3}{2}}}dx$

c) $\int_0^\infty \frac{e^x}{e^x+1}-\frac{e^x}{e^x-1}dx$ d) $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}dx$

e) $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^3(x-1)}{x\ln^3 x}dx$ f) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\operatorname{sen}\frac{1}{x^2}}{\ln(1+x)}dx$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1-e^{-x^2}}{x^2\cos x}-1\right)dx$ h) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-e^{-x^2}}{x^2\cos x}-1\right)dx$

i) $\int_0^\pi \frac{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}{x^{\frac{7}{2}}}dx$ j) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x\operatorname{arctg}^{\frac{1}{3}}(x-1)}{(x-1)^{\frac{2}{3}}\operatorname{sh} x}dx$.

11.12 Encontrar los valores de a, para que las integrales siguientes sean convergentes.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^a} dx$ b) $\displaystyle\int_2^{\infty} \left(\frac{ax}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right) dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{x^a} dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^a} dx$ e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} - \frac{a}{x+1}\right) dx$ f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{1-a}\sqrt[3]{1-x^2}}$

g) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^a \operatorname{sen} x dx$ h) $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2-1} dx$ i) $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{x^a}{x^4-1} dx$

11.13 Se define la función **beta** por $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$. Encontrar los valores reales de p y q para los que la función $B(p,q)$ está definida.

11.14 Se define la función **gamma** por $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^{\infty} x^p e^{-x} dx$.

a) Probar que esta función está definida para todo $p > -1$.

b) Probar que se verifica la igualdad $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, para cualquier p.

c) Calcular, usando b), $\displaystyle\int_0^{\infty} x^6 e^{-x} dx$.

11.15 Sea $f\colon [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Se define la función **transformada integral de Laplace** de la función f, que denotaremos por $\mathcal{L}\{f\}$, como $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx$, siempre que la integral exista. Probar que:

a) Si $f(x) = 1$, $F(s) = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$.

b) Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ y $G(s) = \mathcal{L}\{g(x)\}$, entonces, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}\{\lambda f(x) + \mu g(x)\} = \lambda\mathcal{L}\{f(x)\} + \mu\mathcal{L}\{g(x)\}.$$

c) Si f es derivable y verifica que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)e^{-sx} = 0$, a partir de un cierto s, y existe $\mathcal{L}\{f'(x)\}$, entonces

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = s\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0).$$

d) $\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}$ y que $\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(ax)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$, usando la parte c).