Indice

Introducción

Las derivadas y las integrales tienen diferentes campos de aplicación, pero en este caso en particular, nos referiremos a los beneficios que se obtienen mediante el uso de las integrales, lo cual fue tema de la clase de Cálculo II.

Para llevar a cabo estas aplicaciones, nos valimos del uso de dos herramientas elementales:

- *Las integrales definidas y*
- *El Teorema Fundamental del Cálculo Integral*

Al tener el conocimiento necesario sobre estos dos puntos se podrá llevar a cabo cualquiera de las aplicaciones aquí mencionadas, sumado claro, con las reglas individuales de cada caso en mención.

APLICACIONES DE
LA INTEGRAL

I Parte Área de una región entre dos curvas

Con pocas modificaciones podemos extender la aplicación de las integrales definidas para el cálculo de una región situada por debajo de una curva, al área comprendida de un ***región entre dos curvas****. Si, como en la figura 1.1, las gráficas de ambas, f y g, se localizan por encima del eje x, podemos interpretar geométricamente el área de la región entre las gráficas como el área de la región situada debajo de la gráfica f menos el área de la región situada debajo de la gráfica de g, como muestra la figura 7.1.*

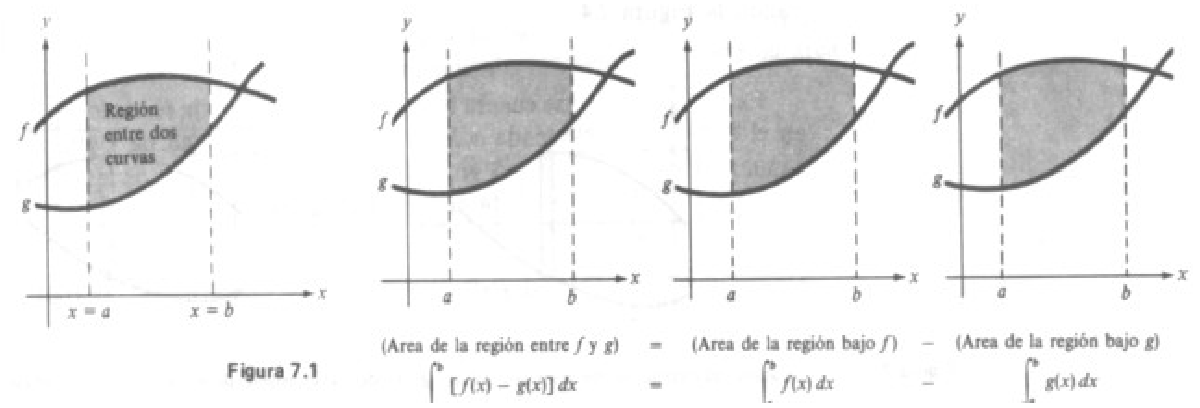


Figura 7.1

Si bien en la figura 7.1 muestra las gráficas de f y g sobre el eje x, esto no es necesario y se puede usar el mismo integrando [f(x) – g(x)] *siempre y cuando f y g sean continuas y* g(x) ≤ f(x) *en el intervalo* [a, b]. *Se resume el resultado en el teorema siguiente.*

ÁREA DE UNA REGIÓN ENTRE DOS CURVAS

Si f y g son continuas en [a, b] y $g(x) \leq f(x)$ para todo x en [a, b] entonces el área de la región limitada por las gráficas de f y g y las líneas verticales x =a y x = b es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Demostración: Partimos en el intervalo [a, b] *en subintervalos, cada uno de anchura Δx y dibujamos un* ***rectángulo representativo*** *de anchura Δx y altura $f(x_i) - g(x_i)$, de donde x está en el i-ésimo intervalo, tal como lo muestra la figura 1.3. El área de este rectángulo representativo es*

$$\Delta A_i = (\text{altura})(\text{anchura}) = [f(x_i) - g(x_i)]\, \Delta x$$

Sumando las áreas de los n rectángulo s y tomando el límite cuando $||\Delta|| \to 0$ $(n \to \infty)$, *tenemos*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]\, \Delta x$$

Por ser f y g continuas en el intervalo [a, b], *f-g también es continua en dicho intervalo y el límite existe. Por tanto, el área A de la región dada es*

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]\, \Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

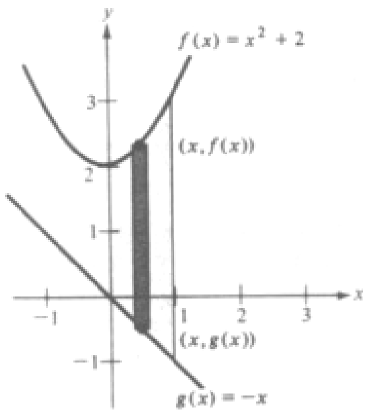
Se usan los rectángulos representativos en diferentes aplicaciones de la integral. Un rectángulo vertical (de anchura Δx) *implica integración respecto a x, mientras un rectángulo horizontal (de anchura* Δy) *implica integración con respecto a y.*

Ejemplo 1.1

Hallar e área de la región limitada por las gráficas de $y = x^2 + 2$, $y = -x$, $x = 0$ y $x = 1$.

Solución: Hacemos $g(x) = -x$ y $f(x) = x^2+2$, entonces $g(x) \le f(x)$ para todo x en [0, 1], *como muestra la figura. Por tanto, el área del rectángulo representativo es*

$$\Delta A = [f(x) - g(x)]\,\Delta x$$
$$= [(x^2+2) - (-x)]\,\Delta x$$



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$
$$= \int_0^1 [(x^2+2) - (-x)]dx$$
$$= [x^3/3 + x^2/2 + 2x]_0^1$$
$$= 1/3 + ½ + 2 = \frac{17}{6}$$

Las gráficas de $f(x) = x^2+2$ y $g(x) = -x$ no se cortan, y los valores de a y b están dados explícitamente. Un tipo de problema más común involucra el área de una región limitada por dos gráficas que se interceptan, debiendo por tanto calcularse los valores de a y b.

Aplicación

El consumo total de gasolina para el transporte en los Estados Unidos desde 1960 hasta 1979 sigue un modelo de crecimiento descrito por la ecuación:

$$f(t) = 0{,}000433t^2 + 0{,}0962t + 2{,}76; \quad -10 \le t \le 9$$

Donde se mide f(t) en miles de millones de barriles y en t en años, correspondiendo t = 0 al primero de enero de 1970. Debido al aumento drástico de los precios del crudo a finales de los años setenta, el modelo de crecimiento del consumo cambió y comenzó a seguir esta otra forma:

$$g(t) = -0{,}00831t^2 + 0{,}152t + 2{,}81; \quad 9 \le t \le 16$$

Como muestra la siguiente figura. Calcular la cantidad total de gasolina ahorrada desde 1979 hasta 1985 como resultado de este cambio en los modelos que expresan estos ritmos de consumo.

Solución: Al estar situada la gráfica del modelo que regía hasta 1979 por encima de la del modelo posterior en el intervalo [9, 16] *la cantidad de gasolina ahorrada viene dada por la integral siguiente:*

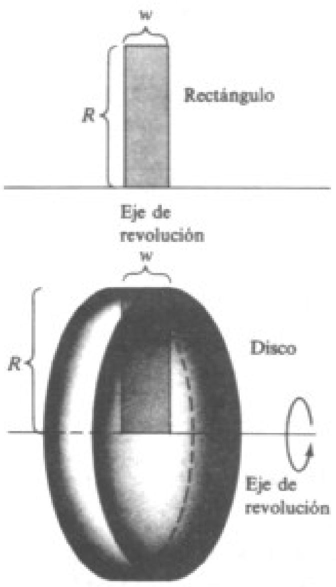
$$\int_9^{16} [\overbrace{(0{,}000433t^2 + 0{,}0962t + 2{,}76)}^{f(t)} - \overbrace{(-0{,}00831t^2 + 0{,}152t + 2{,}81)}^{g(t)}]\, dt$$

$$= \int_9^{16} (0{,}008743t^2 - 0{,}0558t - 0{,}05)\, dt$$

$$= \left[(0{,}008743t^3/3) - (0{,}0558t^2/2) - 0{,}05t\right]_9^{16}$$

$\approx$ *4,58 miles de millones de barriles*

Por tanto, se ahorraron 4,58 miles de millones de barriles de gasolina, que a razón de 42 galones por barril supuso un ahorro de 0,2 billones de galones.



Otra aplicación importante de la integral, la tenemos en el uso para calcular el volumen de un sólido tridimensional. Ahora veremos los sólidos de revolución. Este tipo de sólidos suele aparecer frecuentemente en ingeniería y en procesos de producción. Son ejemplos de ***sólidos de revolución****: ejes, embudos, pilares, botellas y émbolos.*

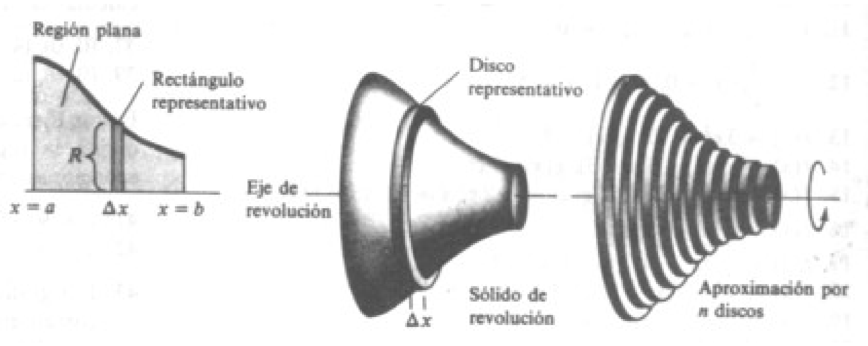
Si giramos una región del plano alrededor de una línea, el sólido resultante es conocido como ***sólido de revolución*** *y la línea como* ***eje de revolución****. El más simple de ellos es el cilindro circular recto o disco, que se forma al girar un rectángulo alrededor de un eje adyacente a uno de los lados del rectángulo como se muestra en la figura. El volumen de este disco es*

$$\text{Volumen del disco} = \pi R^2 w$$

Donde R es el radio del disco y w es la anchura.

Para ver cómo usar el volumen del disco para calcular el volumen de un sólido de revolución general, considérese el sólido de revolución obtenido al girar la región plana de la figura alrededor del eje indicado. Para calcular el volumen de este sólido, consideremos un rectángulo representativo en la región plana. Cuando se gira este rectángulo alrededor del eje de revolución, genera un disco representativo cuyo volumen es

$$\Delta V = \pi R^2 \, \Delta x$$



Si aproximamos el volumen de un sólido por n de tales discos de anchura Δx y de radio $R(x_i)$, tenemos

$$\text{Volumen del sólido} \approx \sum_{i=1}^{n} \pi[R(x_i)]^2 \Delta x = \pi \sum_{i=1}^{n} [R(x_i)]^2 \Delta x$$

Tomando el límite $||\Delta|| \to 0$ $(n \to \infty)$, tenemos

$$\text{Volumen de un sólido} = \lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{n} [R(x_i)]^2 \Delta x = \pi \int_a^b [R(x)]^2\, dx$$

Esquemáticamente, representamos el método de discos:

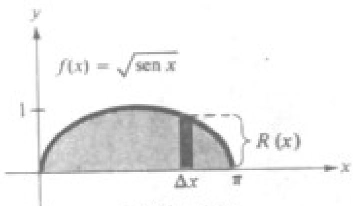
Fórmula vista En precálculo		*Elemento Representativo*		*Nueva fórmula de integración*
Volumen del disco $V = \pi R^2 w$	$\longrightarrow$	$\Delta V = \pi[R(xi)]^2 \Delta x$	$\longrightarrow$	$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\, dx$

El MÉTODO DEL DISCOS

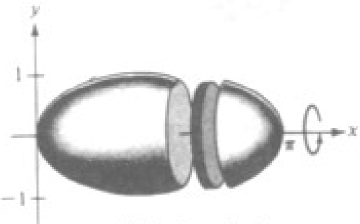
Para calcular el volumen de un sólido de revolución por el método de discos, úsese una de las fórmulas siguientes.

Eje horizontal de revolución	*Eje vertical de revolución*
$\text{Volumen} = V = \pi \int_a^b [R(x)]^2\, dx$	$\text{Volumen} = V = \pi \int_c^d [R(y)]^2\, dy$

Ejemplo 2.1



Región plana



Sólido de revolución

Hallar el volumen del sólido formado al girar la región limitada por la gráfica de f(x) = $\sqrt{senx}$ y el eje x(0 $\leq$ x $\leq$ π) alrededor del eje x.

Solución: Se observa que el radio de este sólido viene dado por:

$$R(x) = f(x) = \sqrt{senx}$$

Y se sigue que su volumen es:

$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} (\sqrt{senx})^2 \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} senx \, dx$$

$$= -\pi \cos x \Big]_0^{\pi} = \pi (1+1) = 2\pi$$

III Parte Métodos de capas

1. *Mostrar en un gráfico al área cuestión, una franja representativa paralela al eje de revolución y el rectángulo aproximante.*
2. *Escribir el volumen (=circunferencia media x la altura x espesor) de la capa cilíndrica engendrada al girar el rectángulo aproximante en torno al eje de revolución, y sumar para n rectángulos.*
3. *Suponer que el número de rectángulos crece indefinidamente y aplicar el teorema fundamental.*

Si el eje de revolución es el eje y, y el área plana, en el primer cuadrante, está acotada abajo por el eje x , arriba por $y = f(x)$, a la izquierda por $x = a$ y a la derecha por $x = b$, entonces el volumen V viene dado por:

$$V = 2\pi \int_a^b xy\,dx = 2\pi \int_a^b x(f)\,dx$$

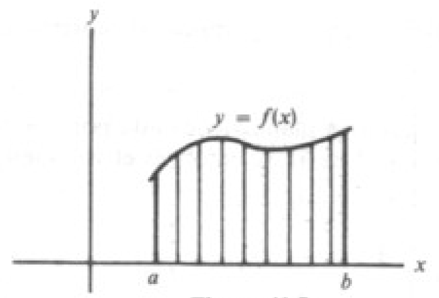


Figura 41.5.

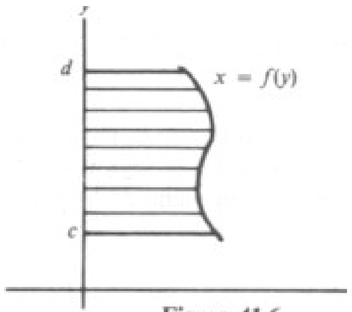


Figura 41.6.

Análogamente, si el eje de rotación es el ejes x y el área plana, en el primer cuadrante, está limitada a la izquierda por el eje y, a la derecha por $x = f(y)$, superiormente por $y = d$, e inferiormente por $y = c$, entonces el volumen V viene dado por:

$$V = 2\pi \int_c^d xy\,dy = 2\pi \int_c^d yf(y)\,dy$$

Ejemplo 3.1

Hallar el volumen generado al girar el área acotada por la parábola $y^2 = 8x$ y su latus rectum $(x = 2)$ en torno al latus rectum

Solución: Dividimos el área plana horizontalmente. Cuando el rectángulo aproximante se hace girar en torno al latus rectum, se genera un disco de radio $2 - x$, altura Δy, y volumen $\pi(2 - x)^2 \Delta y$. El volumen requerido es:

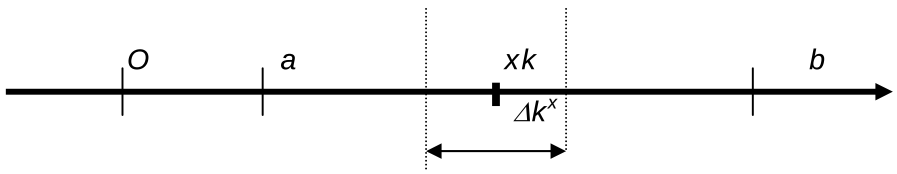
$$V = \int_{-4}^{4} \pi(2-x)^2\,dy = 2\pi \int_0^4 (2-x)^2 dy = 2\pi \int_0^4 (2-(y^2/8))^2 dy = \frac{256}{15}\pi \text{ unidades}$$

Fuerza Constante

El trabajo W realizado por una fuerza constante F que actúa a lo largo de una distancia s sobre una línea recta es de Fs unidades.

Fuerza Variable

Consideremos una fuerza que varía continuamente y actúa a lo largo de una línea recta. Sea x la distancia dirigida del punto de aplicación de la fuerza a un punto fijado de ka recta y sea la fuerza dada como una cierta función F(x) de x. Para hallar el trabajo realizado al moverse el punto de aplicación desde x = a hasta x = b.



1. *Dividir el intervalo* $a \leq x \leq b$ *en n subintervalos de longitudes* Δk^x *y sea x cualquier punto del k-ésimo subintervalo.*
2. *Supongamos que durante el desplazamiento sobre el k-ésimo subintervalo la fuerza es constante e igual a* $F(x_k)$*. El trabajo realizado en ese desplazamiento es entonces* $F(x_k)\ \Delta_k x$ *y el trabajo total realizado viene dado por* $\sum_{k=1}^{n} F(x_k)\ \Delta_k x = \int_a^b F(x)dx$
4. *Hacemos crecer el número de subintervalos indefinidamente de manera tal que cada* $\Delta_k x \to 0$ *y aplicamos el teorema fundamental para llegar a:*

$$\mathrm{W} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} F(x_k)\Delta_k x = \int_a^b F(x)dx$$

Ejemplo 4.1

Un ca ... n tambor cilíndrico. ... ado por la fuerza de la gravedad para desenrollar otros 250 pies.

Sea x = longitud de cable desenrollada. Entonces F(x) = 3x y

$W = \int_{50}^{300} 3x\ dx = 131\ 250$ *pies-libras*

La **presión** se define como la fuerza por unidad de área:

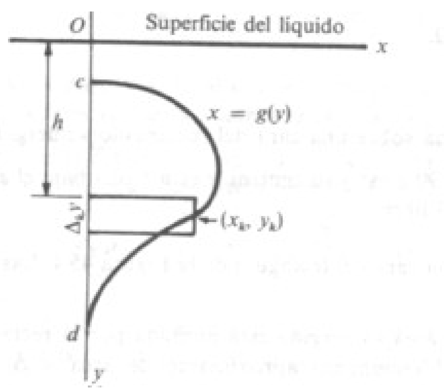
$$P = \frac{\text{fuerza perpendicular a un área}}{\text{Área sobre la que actúa la fuerza}}$$

La presión P sobre una superficie horizontal de área A debida a una columna de fluido de altura h que descansa sobre ella es P = wh, donde w = peso del fluido por unidad de volumen. La fuerza sobre esa superficie es F = presión x área de la superficie = whA.

En cualquier punto en el interior de un fluid, este ejerce la misma presión en todas las direcciones.

FUERZA SOBRE UN ÁREA SUMERGIDA

La siguiente figura muestra un área plana sumergida verticalmente en un líquido de peso w libras por unidad de volumen. Tomemos el área en el plano xy, con el eje x en la superficie del líquido y el eje y positivo dirigido hacia abajo. Dividimos el área en franjas(siempre paralelas a la superficie del líquido) y aproximamos cada una con un rectángulo.



Denotemos por h la profundidad del lado superior del rectángulo representativo de la figura. La fuerza ejercida sobre este rectángulo de anchura $\Delta_k y$ y longitud $x_k = g(y_k)$ es $wY_k g(y_k)\ \Delta_k y$, donde Y_k es algún valor de y entre h y h + $\Delta_k y$. La fuerza total sobre el área plana es, por :

TEOREMA DE BLISS

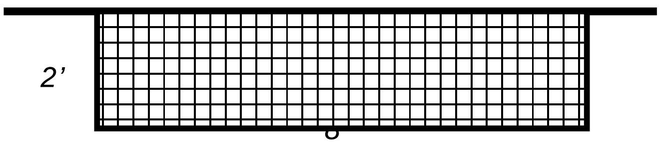
$$F = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} wY_k g(Y_k) = w\int_c^d yg(y)dy = w\int_c^d yx\ dy$$

Por lo tanto, la fuerza ejercida sobre un área plana sumergida verticalmente en un líquido es igual al producto del peso de una unidad de volumen del líquido por el área sumergida y por la profundidad del centroide del área que está bajo la superficie del líquido. Debe usarse esto, más bien que una fórmula, como a principio a la hora de establecer tales integrales.

Ejemplo 5.1

Hallar la fuerza sobre una cara del rectángulo sumergido en agua como indica el gráfico. El agua pesa 62.5 libras/pies^2.

Superficie del agua



El área sumergida es de 16 pies^2 *y su centroide está 1 pie bajo el agua. Por tanto,*

F = peso específico x área x profundidad del centroide

= 62.5 libras/pies^2 *x 16 pies*^{2} *x 1 pies = 100 pies*

- *Momentos de inercia de áreas planas y sólidos de revolución*

El momento de inercia I_L de un área plana A con respecto a una recta L en su plano se puede hallar como sigue:

1. *Dibujar el área, mostrando una franja representativa paralela a la recta y el rectángulo aproximante.*
2. *Hacer el producto del área del rectángulo por el cuadrado de la distancia de su centroide a la recta y sumar para todos los rectángulos.*
3. *Suponer que el número de rectángulos crece indefinidamente y aplicar el teorema fundamental.*

El momento de inercia de un sólido de volumen V generado al girar un área plana en torno a una recta L en su plano, con respecto a la recta L, se puede calcular así:

1. *Dibujar una franja representativa paralela al eje x y mostrar el rectángulo aproximante.*
2. *Hacer el producto del volumen generado al girar el rectángulo en torno al eje (una capa) por el cuadrado de la distancia del centroide al eje y sumar para todos los rectángulos.*
3. *Suponer que el número de rectángulos crece indefinidamente y aplicar el teorema fundamental.*

RADIO DE GIRO

El número positivo R definido por la relación $I_L = AR^2$ en el caso de un área plana A, y por $I_L = VR^2$ en el caso de un sólido de revolución, se llama radio de giro del área o volumen con respecto a L.

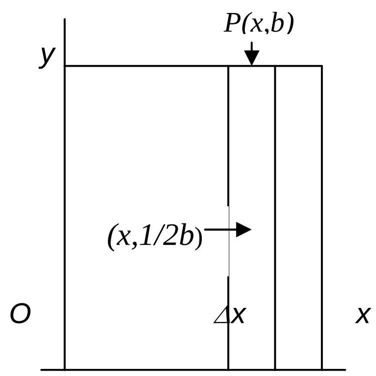
TEOREMA DEL EJE PARALELO

El momento de inercia de un área, arco o volumen con respecto a cualquier eje es igual al momento de inercia con respecto a un eje paralelo que pase por el centroide más el producto del área, longitud de arco o volumen por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes paralelos.

Ejemplo 6.1

Hallar el momento de inercia de un área rectangular A de dimensiones a y b con respecto a uno de sus lados.

Tomamos el rectángulo como en la siguiente gráfico, con el lado en cuestión sobre el eje y.



El rectángulo aproximante tiene área = bΔx y centroide (x,½b). Por tanto, su elemento de momento es $x^2 b\Delta x$.

$$I_y = \int_0^a x^2 b \quad dx = \left[\ b\,\frac{x^3}{3}\ \right]_0^a = \frac{ba^3}{3} = \frac{1}{3} Aa^2$$

Así pues, el momento de inercia de un área rectangular con respecto a un lados es un tercio del producto del área por el cuadrado de la longitud del otro lado.

- *Centroides de áreas planas y sólidos de revolución*

La masa de un cuerpo físico es una medida de la cantidad de materia en él, mientras que su volumen mide el espacio que ocupa. Si la masa por unidad de volumen es la misma en todo él, se dice que el cuerpo es homogéneo o de densidad constante.

Es muy conveniente en la Física y Mecánica considerar la masa de un cuerpo como concentrada en un punto, llamado ***su centro de masa (o centro de gravedad)****. Para un cuerpo homogéneo, ese punto coincide con su centro geométrico o centroide. Por ejemplo, el centro de masa de una bola homogénea coincide con el centroide(su centro) de la bola como sólido geométrico (una esfera).*

El centroide de una hoja rectangular de papel está a medio camino entre sus dos superficies y en la intersección de sus diagonales. EL centro de masa de una lámina muy delgada coincide con su centroide considerada como área plana.

El primer momento M_L de un área plana con respecto a una recta L es el producto del área por la distancia dirigida de su centroide a esa recta. El momento de un área compuesta con respecto a una recta es la suma de los momentos de las áreas individuales.

El momento de un área plana con respecto a un eje de coordenadas se calcula de la siguiente manera:

1. *Dibujar el área, mostrando una franja representativa y el rectángulo aproximante,*

2. *Multiplicar el área del rectángulo por la distancia de su centroide al eje y sumar para todos los rectángulos.*
3. *Suponer que el número de los rectángulos crece indefinidamente y aplicar el teorema fundamental.*

Para un área plana A con centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ *y momentos* M_z *y* M_y *con respecto a los ejes x e y,*

$$A\bar{x} = M_y \quad y \quad A\bar{y} = M_x$$

El (primer) momento de un sólido de volumen V, generado al girar un área plana en torno a un eje de coordenadas, con respecto al plano que pasa por el origen y es perpendicular al eje, puede calcularse como sigue:

1. *Dibujar el área mostrando una franja representativa y el rectángulo aproximante.*
2. *Multiplicar el volumen, disco o capa generado al girar el rectángulo en torno al eje por la distancia del centroide del rectángulo al plano y sumar para todos los rectángulos.*
3. *Suponer que el número de los rectángulos crece indefinidamente y aplicar el teorema fundamental.*

Cuando el área se gira en torno al eje x, el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ *está en el eje x. Si* M_{yz} *denota el momento del sólido con respecto al plano por el origen y es perpendicular al eje x, entonces:*

$$V\bar{x} = M_{yz} \quad y \quad \bar{y} = 0$$

Análogamente, cuando el área se hace girar en torno al eje y, el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ *está en el eje y. Si* M_{xz} *es el momento del sólido con respecto al plano por el origen perpendicular al eje y, entonces:*

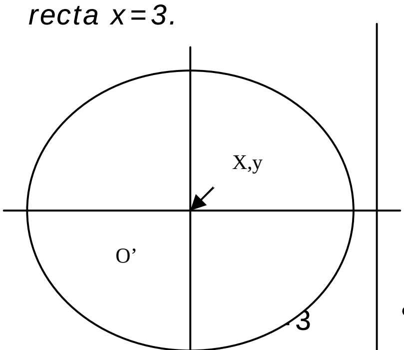
$$V\bar{y} = M_{xz} \quad y \quad \bar{x} = 0$$

PRIMER TEOREMA DE PAPPUS

Si un área plana se hace girar en torno a un eje en su plano que no cruce a esa área, el volumen del sólido de revolución generado es igual al producto del área por la longitud de la trayectoria descrita por el centroide del área.

Ejemplo 6.2

Hallar el volumen del toro generado al girar el círculo $x^2 + y^2 = 4$ en torno a la recta $x=3$.



El centroide del disco describe un círculo de radio 3. Por tanto, $V=\pi(2)^2 \times 2\pi(3) = 24\pi^2$ por el primer teorema de Pappus.

- *Centroides y momentos de inercia de arcos y superficies de revolución*

  - *Centroide de un arco*

Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide de un arco AB de una curva plana de ecuación $F(x,y) = 0$ o' $x = f(u)$, $y = g(u)$ satisfacen las relaciones :

$$\bar{x}s = \bar{x}\int_{AB} ds = \int_{AB} x\,ds \quad e \quad \bar{y}s = \bar{y}\int_{AB} ds = \int_{AB} y\,ds$$

SEGUNDO TEOREMA DE PAPPUS

Si un arco de curva se hace girar en torno a un eje situado en un su plano pero que no cruce al arco, el área de la superficie generada es igual al producto de la longitud del arco por la longitud de la trayectoria descrita por el centroide del arco.

➢ *Momentos de inercia de un arco*

Los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados de un arco AB de una curva (un fragmento de hilo fino homogéneo, por ejemplo) vienen dados por:

$$I_x = \int_{AB} y^2\, ds \quad e \quad I_y = \int_{AB} x^2\, ds$$

- *Centroides de una superficie de revolución*

La coordenada $\bar{x}$ *del centroide de una superficie de revolución generada al girar un arco AB de una curva en torno al eje x satisface la relación:*

$$\bar{x}\, S_x = 2\pi \int_{AB} xy\, ds$$

- *Momentos de inercia de una superficie de revolución*

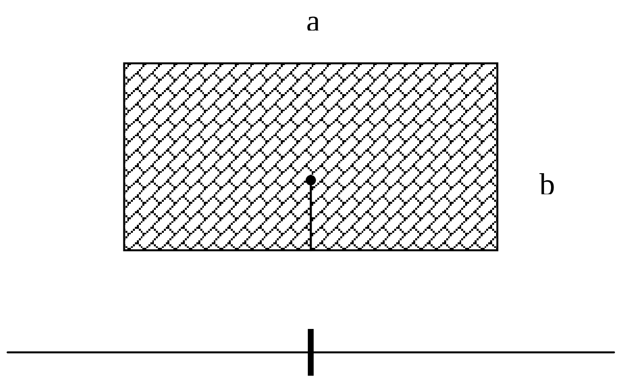
El momento de inercia con respecto al eje de rotación de la superficie generada al girar el arco AB de una curva en torno al eje x viene dado por:

$$I_x = 2\pi\int_{AB} y^2(y\ ds) = 2\pi\int_{AB} y^3\ ds$$

Ejemplo 6.3

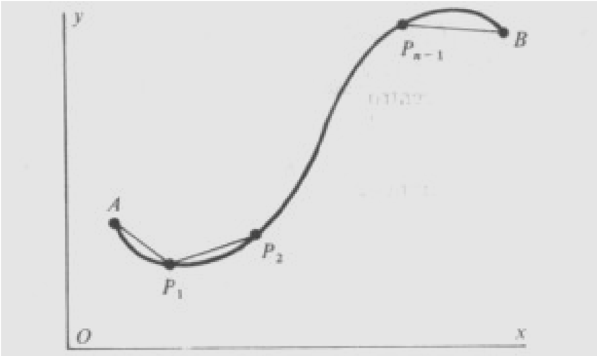
Calcular el área de la superficie de revolución generada al girar el rectángulo de dimensiones a, b en torno a un eje que está a c unidades del centroide (c> ,b).

El perímetro del rectángulo es 2(a + b) y el centroide describe un círculo de radio c. Entonces $S = 2(a + b)(2\pi c)=4\pi(a + b)c$ por el segundo teorema de Pappus.



- *Longitud de un arco*

La longitud de un arco AB de una curva es por definición el límite de la suma de las longitudes de un conjunto de cuerdas consecutivas AP_1, P_1, P_2....,P_{n-1} B, que unos puntos del arco, cuando el número de puntos crece indefinidamente de forma tal que la longitud de cada cuerda tiende a cero.



Si A(a, c) y B(b, d) son dos puntos sobre la curva y = f(x), donde f(x) y su derivada f'(x) son continuas en el intervalo a ≤ x ≤ b, la longitud del arco AB viene dada por:

$$S = \int_{AB} ds = \int_a^b \sqrt{1+(dy/dx)^2}\ dx$$

Análogamente, si A(a ,c) y B(b, d) son dos puntos de una curva definida paramétricamente por las ecuaciones x = f(u), y = g (u) y si se satisfacen condiciones de continuidad, la longitud del arco AB viene dada por:

$$S = \int_{AB} ds = \int_c^d \sqrt{1+(dx/dy)^2}\ dy$$

Si A(u = u1) y B(u = u2) son dos puntos de una curva definida paramétricamente por las ecuaciones x = f (u), y = f(u) y si se satisfacen condiciones de continuidad, la longitud del arco AB viene dada por:

$$S = \int_{AB} ds = \int_{u1}^{u2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du$$

Ejemplo 7.1

Calcular la longitud del arco de la curva y = $x^{3/2}$ entre x = 0 y x =5.

Solución: Puesto que dy/dx = 3/2$x^{1/2}$,

$$S = \int_{AB} ds = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx$$

$$= \int_{0}^{5} \sqrt{1 + 9/4x}\, dx$$

$$= \left[\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^5$$

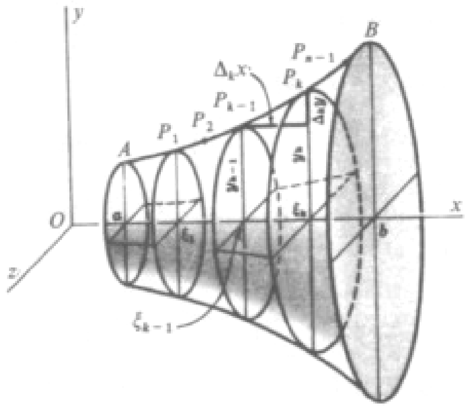
$$= \frac{335}{27}\, unidades$$

- *Área de una superficie de revolución*

El área de la superficie generada al girar el arco AB de una curva continua en torno a una recta de su plano es por definición el límite de la suma de las áreas generadas por las n cuerdas consecutivas AP_1, P_1, P_2 …,P_{n-1} B que unen los puntos del arco, al girar en torno a dicha recta, cuando el número de cuerdas crece indefinidamente de manera tal que la longitud de cada una de ellas tiende a cero.

Si A(a, c) y B(b, d) son dos puntos de la curva y = f(x), donde f(x) y f'(x) son continuas y f(x) no cambia de signo en el intervalo a $\leq$ x $\leq$ b, el área de la superficie generada al girar el arco AB en torno al eje x viene dada por:

$$S_x = 2\pi\int_{AB} y\, ds = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$



Cuando, además, f'(x) $\neq$ 0 en el intervalo, una forma alternativa es:

$$S_x = 2\pi\int_{AB} y\, ds = 2\pi\int_c^d y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Si, A(a, c) y B(b, d) son dos puntos de la curva x = g(y), donde g(y) y su derivada respecto de y satisfacen propiedades similares a las citadas en el *párrafo anterior, el área de la superficie generada al girar el arco AB en torno al eje y viene dada por:*

$$S_y = 2\pi\int_{AB} x\, ds = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Si a(U = u1) y B(u=u2) son dos puntos de la curva definida por las ecuaciones paramétricas x = f(u), y = g(u) si se cumplen condiciones de continuidad, el área de la superficie generada al girar el arco AB en torno al eje x viene dada por :

$$Sx = 2\pi\int_{AB} y \quad ds = 2\pi\int_{u1}^{u2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du$$

y el área generada al girar el arco AB en torno al eje y por:

$$Sy = 2\pi\int_{AB} x \quad ds = 2\pi\int_{u1}^{u2} x\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du$$

Ejemplo 7.2

Hallar el área de la superficie de revolución generada al girar en torno al eje x el arco de $y^2 + 4x = 2 \ln y$ entre $y = 1$ e $y = 3$.

$$Sx = 2\pi\int_c^d y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$= 2\pi\int_1^3 y\,\frac{1+y^2}{2y}\,dy = \pi\int_1^3 \left(1+y^2\right)dy = \frac{32}{3}\pi \quad unidades$$

Conclusión

Este trabajo nos sirvió para entender un poco las aplicaciones que tienen las integrales para el uso matemático en la ingeniería primordialmente. Es una herramienta muy útil para el cálculo de áreas difíciles de solucionar mediante los métodos convencionales o por tener formas poco ortodoxas.

Esto no quiere decir que sólo con la realización de este trabajo, sea entendible el amplio campo que abarcan todas estas aplicaciones; ya que sólo se lograría esto mediante la práctica constante y minuciosa de cada caso.

Bibliografía

Matemáticas 6. Larson, Roland E., Hostetler, Robert P. . McGraw Hill, 1989. Bogotá , Colombia

Cálculo Diferencial e Integra Tercera Edición. Ayres,Jr., Frank, Mendelson, Elliot. McGraw Hill, 1991. Bogotá Colombia.

Análisis Matemático (Bilingüe Españo–Inglés). Protter, Murray H. , Morrey, Charles B. . Fondo Educativo Interamericano S.A., 1969. Estados Unidos.