Capítulo 9

Series de potencias. Desarrollos en serie de Taylor

En la representación (e incluso en la construcción) de funciones, desempeñan un papel especialmente destacado cierto tipo de series, denominadas series de potencias. Los aspectos profundos de su estudio corresponden a la teoría de funciones de variable compleja más que a la teoría de funciones de variable real, por lo que aquí damos simplemente algunas propiedades sencillas, suficientes para nuestros propósitos. Como referencia utilizamos [APOSTOL1].

9.1. Series de potencias

9.1.1. Convergencia de las series de potencias

Definición 9.1.1. *Recibe el nombre de* **serie de potencias** *toda serie de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n.$$

El número real a_n se denomina **coeficiente n-ésimo** *de la serie de potencias (obsérvese que el término n-ésimo de la serie es $a_n(x-c)^n$). Si los coeficientes a_0, a_1, a_{m-1} son nulos, la serie suele escribirse $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n(x-c)^n$.*

En cierto modo, se trata de una especie de polinomio con infinitos términos. Vamos a ver que las funciones definidas como suma de una serie de potencias comparten muchas propiedades con los polinomios.

¿Para qué valores de x converge una serie de potencias? Obviamente, es segura la convergencia para $x = c$, con suma a_0, y puede suceder que éste sea el único punto en el que la serie converge. Fuera de este caso extremo, la situación es bastante satisfactoria: veamos algunos ejemplos.

Ejemplos. a) La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

converge (absolutamente) si y solo si $x \in (-1,1)$ (con suma $\frac{1}{1-x}$, como sabemos).

b) La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$
converge si y solo si $x \in [-1,1)$. Si $x \in (-1,1)$, converge absolutamente.

c) La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$
converge (absolutamente) si y solo si $x \in [-1,1]$.

d) La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n}$$
converge si y solo si $x \in [-1,1]$. Si $x \in (-1,1)$, converge absolutamente.

e) La serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
converge (absolutamente) para todo $x \in \mathbb{R}$ (y la suma es e^x).

f) La serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$$
converge solamente para $x = 0$.

Lema 9.1.2. *Si para algún $r \in (0,+\infty)$ la sucesión $(a_n r^n)$ está acotada, entonces para cada $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-c| < r$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ es absolutamente convergente.*

Demostración. Sea M tal que para todo $n \geq 0$ se tenga $|a_n r^n| \leq M$. Entonces
$$0 \leq |a_n (x-c)^n| = |a_n| r^n \left(\frac{|x-c|}{r}\right)^n \leq M \left(\frac{|x-c|}{r}\right)^n$$
y como la serie geométrica
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x-c|}{r}\right)^n$$
converge, se deduce que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x-c)^n|$ también converge. □

Definición 9.1.3. *Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$, su* **radio de convergencia** *es el valor (finito o infinito) dado por*
$$R = \sup\{|x-c| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \textit{ converge}\}.$$
Si $R > 0$, el intervalo $(c-R, c+R)$ se denomina **intervalo de convergencia** *de la serie de potencias.*

Teorema 9.1.4. *Dada una serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *con radio de convergencia R, se tiene:*

a) Si $|x-c| < R$*, la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *converge absolutamente.*

b) Si $|x-c| > R$*, la serie no converge y la sucesión* $(a_n(x-c)^n)$ *no está acotada.*

Nota. Según los ejemplos previos, cuando R es finito no puede decirse nada en general sobre la convergencia en los puntos $c+R$, $c-R$.

Demostración. De la definición de R se deduce que si $|x-c| < R$, debe existir un punto x_1 tal que $|x-c| < |x_1-c|$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1-c)^n$ converge. Aplicando el lema 9.1.2, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ debe converger absolutamente. Esto demuestra *a)*. La parte *b)* es una consecuencia directa de la definición de R. □

Ejemplos. a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ tiene radio de convergencia 1. Para $x=1$ diverge a $+\infty$ y para $x=-1$ es oscilante.

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ tiene radio de convergencia 1. Para $x=1$ diverge a $+\infty$ y para $x=-1$ es convergente (pero no absolutamente).

c) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ tiene radio de convergencia 1. Para $x=1$ y para $x=-1$ es convergente (absolutamente).

Observación. Existe una fórmula que permite expresar el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ en función de sus coeficientes. Se trata de la ***fórmula de Cauchy-Hadamard:***

$$R = \frac{1}{\operatorname{lím\,sup}_n \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Sin embargo, en los ejemplos habituales es más cómodo realizar directamente el estudio de la convergencia de las series para los distintos valores de x, generalmente con ayuda del criterio 8.3.6 del cociente o del criterio 8.3.5 de la raíz.

En la fórmula de Cauchy-Hadamard, a_n es exactamente el coeficiente de $(x-c)^n$, de modo que si se quiere utilizar por ejemplo para hallar el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$, hay que calcular $(\operatorname{lím\,sup} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$ donde $a_n = 1$ si n es par y $a_n = 0$ si n es impar (¿cuál es este límite superior?); por suerte, en este y en casi todos los ejemplos usuales podemos evitar este cálculo si recurrimos a la definición de radio de convergencia y al estudio directo de la convergencia de las series.

Este ejemplo muestra también por qué hay que usar obligadamente límite superior en la fórmula: el límite no tiene por qué existir.

9.1.2. Propiedades de las funciones representadas por series de potencias

La suma de una serie de potencias de radio no nulo define en su intervalo de convergencia una función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n.$$

Se dice entonces que la serie ***representa a la función*** f en el intervalo de convergencia y que es ***el desarrollo en serie de potencias*** de la función f en el punto c.

Se plantean entonces de manera natural dos problemas (ver [APOSTOL1, págs. 528–529]):

- dada la serie, hallar propiedades de la función suma;
- dada una función, averiguar si se puede representar por una serie de potencias (suele decirse entonces que la función es ***desarrollable en serie de potencias***).

Lema 9.1.5. *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* R. *Entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}$ *tiene también radio de convergencia* R.

Demostración. Se trata de probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}$ converge (absolutamente) si $|x-c| < R$ y que no converge si $|x-c| > R$.

Sea $|x-c| < R$. Podemos elegir algún $y \in \mathbb{R}$ tal que $|x-c| < |y-c| < R$; entonces,

$$|na_n(x-c)^{n-1}| = |a_n(y-c)^n| \cdot \left| \frac{n(x-c)^{n-1}}{(y-c)^n} \right|.$$

Como

$$\lim_n \left| \frac{n(x-c)^{n-1}}{(y-c)^n} \right| = \lim_n \frac{n}{|y-c|} \left| \frac{x-c}{y-c} \right|^{n-1} = 0,$$

esta sucesión está acotada, es decir, hay alguna constante $M > 0$ tal que para todo n

$$\left| \frac{n(x-c)^{n-1}}{(y-c)^n} \right| \leq M.$$

Por lo tanto, para todo n

$$|na_n(x-c)^{n-1}| \leq M|a_n(y-c)^n|.$$

Según el teorema 9.1.4, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(y-c)^n|$ converge, así que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}$ converge absolutamente.

Si, por el contrario, $|x-c| > R$, entonces la sucesión $(a_n(x-c)^n)$ no está acotada, luego la sucesión $(na_n(x-c)^n)$ tampoco lo está y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}$$

no converge. □

Teorema 9.1.6. *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *una serie de potencias de radio* $R>0$ *y sea*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n,$$

definida si $|x-c|<R$*. Entonces la función* f *es derivable y si* $|x-c|<R$ *se tiene*

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}.$$

Demostración. Supongamos, para simplificar la notación, que $c=0$. Es decir,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

definida si $|x|<R$, y se trata de probar que f es derivable y que

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1},$$

si $|x|<R$. Sea $|x|<s<R$ y sea $y\in(-s,s)$, $y\neq x$. Entonces,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{y^n-x^n}{y-x}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{y^n-x^n}{y-x}.$$

Según el lema 9.1.5, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ converge.

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\frac{y^n-x^n}{y-x}-nx^{n-1}\right]=\sum_{n=2}^{\infty} a_n\left[\frac{y^n-x^n}{y-x}-nx^{n-1}\right].$$

Ahora bien, para cada $n\geq 2$,

$$\begin{aligned}\frac{y^n-x^n}{y-x}-nx^{n-1}&=\left(y^{n-1}+y^{n-2}x+y^{n-3}x^2+\cdots+yx^{n-2}+x^{n-1}\right)-nx^{n-1}\\&=(y-x)\left(y^{n-2}+2y^{n-3}x+3y^{n-4}x^2+\cdots+(n-2)yx^{n-3}+(n-1)x^{n-2}\right).\end{aligned}$$

Tomando valores absolutos y teniendo en cuenta que $|x|<s$, $|y|<s$, se deduce que

$$\left|\frac{y^n-x^n}{y-x}-nx^{n-1}\right|\leq|y-x|\left(1+2+3+\cdots+(n-1)\right)s^{n-2}=|y-x|\frac{n(n-1)}{2}s^{n-2}.$$

Según el lema 9.1.5, aplicado dos veces, y el teorema 9.1.4, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n s^{n-2}$ converge absolutamente. Sea $M=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|s^{n-2}$. Hemos demostrado que

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}\right|\leq\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\,|y-x|\frac{n(n-1)}{2}s^{n-2}=\frac{M|y-x|}{2}.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}=0,$$

que es lo que teníamos que demostrar. □

La aplicación reiterada de este resultado permite afirmar:

Corolario 9.1.7. *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *una serie de potencias de radio* $R > 0$ *y sea*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

si $|x-c| < R$. *Entonces* f *tiene derivadas de todos los órdenes en* $(c-R, c+R)$, *y se cumple*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-c)^{n-k}.$$

En consecuencia

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!},$$

de manera que las sumas parciales de la serie son los correspondientes polinomios de Taylor de f *en el punto* c.

Demostración. La primera parte se prueba por inducción sobre k. Para la segunda, tomando en particular $x = c$, se sigue que $f^{(n)}(c) = n!\, a_n$. □

Corolario 9.1.8. *Si dos series de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$ *tienen la misma función suma* f *en un cierto entorno del punto* c, *entonces las dos series tienen los mismos coeficientes: en realidad, para todo* $n \geq 0$ *se cumple*

$$a_n = b_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

El teorema 9.1.6 muestra que la derivación de una serie de potencias se hace derivando cada uno de sus términos, como si fuese un polinomio; esto permite sumar fácilmente determinadas series a partir de otras de sumas conocidas.

Ejemplo. Puesto que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ si $|x| < 1$, para estos valores de x se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$; y, en general, $\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} = k!(1-x)^{-k-1}$.

También es útil comprobar que se puede integrar término a término.

Teorema 9.1.9. *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *una serie de potencias de radio* $R > 0$ *y sea*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n, \qquad x \in (c-R, c+R).$$

Entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$$

tiene radio R, *y si* F *es una primitiva de* f *en* $(c-R, c+R)$, *para cada* $x \in (c-R, c+R)$ *se verifica*

$$F(x) = F(c) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}.$$

Demostración. Ya sabemos, por el lema 9.1.5, que las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

tienen el mismo radio de convergencia. Sea

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}, \qquad x \in (c-R, c+R).$$

El teorema 9.1.9 prueba que g tiene derivada en $(c-R, c+R)$ igual a f, es decir, que g es una primitiva de f en $(c-R, c+R)$, por lo que F y g difieren en una constante. Como $g(c) = 0$, se sigue que

$$F(x) - g(x) = F(c). \qquad \square$$

Ejemplo. Partimos de $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, que es válido si $|x| < 1$, y sustituimos x por $-x$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x};$$

es válido si $|-x| < 1$, es decir, si $|x| < 1$. Como $\log(1+x)$ es una primitiva de $\frac{1}{1+x}$ en $(-1,1)$, deducimos que

$$\log(1+x) = \log 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$

si $x \in (-1,1)$.

Ejemplo. Partimos de nuevo de $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, que es válido si $|x| < 1$, y sustituimos x por $-x^2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2};$$

esto es válido si $|-x^2| < 1$, es decir, si $|x| < 1$. Como $\operatorname{arc\,tg} x$ es una primitiva de $\frac{1}{1+x^2}$, resulta que

$$\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} 0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1},$$

si $x \in (-1,1)$.

Hemos visto que en los extremos del intervalo de convergencia la serie puede no converger; si lo hace, es interesante disponer de algún resultado que, bajo ciertas condiciones, garantice que la función definida por la serie sea cuando menos continua, como el siguiente lema (su demostración puede verse en [Ross, teor. 26.6, págs. 147–148]).

Lema 9.1.10 (de Abel). *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ una serie de potencias de radio de convergencia R positivo y finito, y supongamos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ es convergente. Entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{x \to (c+R)^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n.$$

Ejemplo. Demostrar mediante el lema de Abel que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

9.2. Desarrollos en serie de Taylor

El teorema 5.4.8 de Taylor y el corolario 9.1.7 pueden inducir a pensar que si una función f tiene derivadas de todos los órdenes, es representable como suma de su ***serie de Taylor***

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

(como una especie de fórmula de Taylor llevada al límite) en la parte del dominio de f donde tal serie converja. Sin embargo, la situación real no es tan satisfactoria. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

tiene derivadas de todos los órdenes en cada punto de $\mathbb{R}$, y en 0 es $f^{(n)}(0) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, la fórmula $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ solo se cumple para $x = 0$.

Se puede demostrar que para que una función f coincida con la suma de su serie de Taylor es necesario que sus derivadas sucesivas no tengan un tamaño *desmesurado*. En aplicaciones concretas es suficiente comprobar que las derivadas están acotadas por potencias sucesivas de una constante, como vamos a ver ahora.

Proposición 9.2.1. *Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en un intervalo $(c-R, c+R)$. Supongamos que existan números reales no negativos A y B tales que*

$$|f^{(n)}(x)| \leq B \cdot A^n \qquad \text{siempre que } |x-c| < R.$$

Entonces, para todo $x \in (c-R, c+R)$ se verifica

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Demostración. Sea $|x-c| < R$. Si $x \neq c$, dado $m \in \mathbb{N}$, aplicando la fórmula de Taylor (teorema 5.4.8) podemos escribir, para algún t_m comprendido entre x y c,

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \right| = \frac{|f^{(m+1)}(t_m)|}{(m+1)!}|x-c|^{m+1} \leq B \frac{A^{m+1}}{(m+1)!}|x-c|^{m+1}.$$

Por lo tanto, la expresión de la izquierda tiende a 0 cuando $m \to \infty$, es decir, la serie converge y su suma es $f(x)$. $\square$

Ejemplo. La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ cumple $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ para todo $n \geq 0$ y todo $x \in \mathbb{R}$. Tomamos $c = 0$ en la proposición 9.2.1 y deducimos que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Ahora bien,

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{n/2} \operatorname{sen} 0 = 0, & \text{si n es par,} \\ (-1)^{(n-1)/2} \cos 0 = (-1)^{(n-1)/2}, & \text{si n es impar,} \end{cases}$$

luego en la serie solo aparecen los sumandos con $n = 2k+1$ y queda

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. El mismo razonamiento con la función coseno prueba que

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. También se puede obtener derivando el desarrollo de la función seno.

Ejemplo. Tomemos ahora $f(x) = e^x$. Fijado cualquier $R > 0$, tenemos

$$0 \leq f^{(n)}(x) \leq e^R,$$

para todo $n \geq 0$ y todo $x \in (-R, R)$. Tomamos $c = 0$ en la proposición 9.2.1 y como $f^{(n)}(0) = 1$ resulta

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

para todo $x \in (-R, R)$. Como R es arbitrario, el desarrollo es válido para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Nota. Si reflexionamos un momento, tenemos ante nosotros una manera rigurosa de construir las funciones seno, coseno, exponencial. Las series que hemos escrito son series de potencias de radio $+\infty$, que definen sendas funciones en $\mathbb{R}$; otra cuestión es que resulte fácil o complicado demostrar que estas funciones gozan de las propiedades que venimos utilizando en relación con el seno, el coseno y la exponencial. Dedicaremos a su estudio el último capítulo, para que sirva a su vez de muestra de la enorme potencia de los conocimientos que hemos ido adquiriendo a lo largo del curso.

Para comprobar la validez de ciertos desarrollos es a veces más conveniente usar otros recursos, en lugar de la fórmula de Taylor.

Ejemplo (serie binómica). Veamos que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ es

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \qquad \text{siempre que } |x| < 1.$$

Para $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, esta fórmula se reduce a la del binomio de Newton y es válida para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponemos, pues, $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$. El criterio 8.3.6 del cociente nos da que el radio de convergencia de la serie es 1, luego podemos definir una función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \qquad x \in (-1, 1),$$

que, en principio, no tiene por qué coincidir con $(1+x)^\alpha$ en dicho intervalo. Pero como

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1},$$

de

$$\begin{aligned} n\binom{\alpha}{n} + (n+1)\binom{\alpha}{n+1} &= n\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} + (n+1)\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!} \\ &= n\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{n!} \\ &= [n+(\alpha-n)]\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \\ &= \alpha\binom{\alpha}{n}, \end{aligned}$$

se deduce que $f'(x)(1+x) = \alpha f(x)$, por lo que $f(x)/(1+x)^\alpha$ tiene derivada nula y por tanto se mantiene constante en todo el intervalo $(-1,1)$. Tomando $x=0$ se sigue que el valor de tal constante es 1, es decir, que $f(x) = (1+x)^\alpha$ para todo $x \in (-1,1)$. □

De especial interés resulta el caso particular $\alpha = -1/2$. Entonces,

$$\begin{aligned} \binom{-1/2}{n} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \\ &= (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n(n!)} \\ &= (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}, \end{aligned}$$

con lo cual

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}x^n, \qquad -1<x<1.$$

Del criterio 8.3.1 de Leibniz y del lema 9.1.10 de Abel se sigue que esta fórmula también es válida para $x=1$.

A veces se escribe abreviadamente

$$1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1) = (2n-1)!!, \qquad 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n) = (2n)!!.$$

Aplicación. A partir del desarrollo de su derivada se obtiene

$$\operatorname{arc\,sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad -1<x<1,$$

válido también para $|x|=1$, por el lema de Abel.

Ponemos final a este capítulo con una lista de los desarrollos en serie de Taylor-Maclaurin de las funciones que más frecuentemente aparecen en los ejercicios.

a) $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\ldots$, si $-1<x<1$.

b) $(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$, si $-1 < x < 1$.

c) $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$, si $-1 < x \leq 1$.

d) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

e) $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

f) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

g) $\operatorname{arc\,sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \ldots$, si $-1 \leq x \leq 1$.

h) $\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots$, si $-1 \leq x \leq 1$.

9.3. Ejercicios

Ejercicio 9.1. Determinar el intervalo de convergencia de las series de potencias de término n-ésimo:

a)	$\left(\frac{n!}{3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}\right)^2 x^n$	b)	$\binom{2n}{n} x^n$	c)	$n(\sqrt[n]{2}-1)x^n$	d)	$n^{(\log n)/n}(\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{n}})x^n$
e)	$\frac{2^n}{n^2} x^n$	f)	$\frac{2^n}{n!} x^n$	g)	$\frac{3^n}{n4^n} x^n$	h)	$\frac{(-1)^n}{n^2 4^n} x^n$
i)	$\sqrt{n} x^n$	j)	$x^{n!}$	k)	$n^{-\sqrt{n}} x^n$	l)	$\frac{3^n}{\sqrt{n}} x^{2n+1}$
m)	$n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$	n)	$\frac{\log n}{n} x^n$	ñ)	$x^n \operatorname{tg} \frac{a}{2^n}, \quad a > 0$		

Ejercicio 9.2. Desarrollar en series de potencias de x las siguientes funciones, indicando en qué intervalos son válidos los desarrollos:

a)	$\frac{2x^2-3}{(x-1)^2}$	b)	$\frac{x}{9+x^2}$	c)	$\frac{1}{4-x^4}$
d)	$\log(1+x-2x^2)$	e)	$\log\frac{1+x}{1-x}$	f)	$\log(x+\sqrt{1+x^2})$
g)	$\sqrt[3]{8+x}$	h)	$(1+e^x)^3$	i)	$(1+x)e^{-x}$
j)	$\cos^2 x$	k)	$\cos x \operatorname{sen}^2 x$	l)	$\operatorname{sen}^2 2x$
m)	$\log\frac{a+bx}{a-bx}, \quad a,b>0$	n)	$\log(1-2x)$	ñ)	$\sqrt{1+x^3}$

o) $\dfrac{x}{a^2-b^2x^2}$, $a,b>0$ p) $(x^2+1)e^{2x}$ q) $\operatorname{sen}x - x\cos x$

r) $\dfrac{1}{x-1}+x^2\operatorname{sen}x$ s) $\displaystyle\int_0^x e^{-z^2}\,dz$ t) $\displaystyle\int_0^x \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$

Ejercicio 9.3. Sea $f(x)=\displaystyle\int_0^x \sqrt{8-t^3}\,dt$, para $x\in(-\infty,2]$. Desarrollar f en serie de potencias de x (centrada en 0). Hallar el radio y el intervalo de convergencia del desarrollo. Hallar $f^{(7}(0)$ y $f^{(11}(0)$.

Ejercicio 9.4. Desarrollar en series de potencias de $(x-x_0)$ las siguientes funciones, indicando en qué intervalos son válidos los desarrollos:

a) $(a+bx)^{-1}$, $x_0=1$, $a,b>0$ b) $\operatorname{sen}\dfrac{3x}{2}$, $x_0=\pi$

c) $\sqrt{1+x}$, $x_0=3$ d) $\log 2x-\dfrac{1}{x-1}$, $x_0=2$

Ejercicio 9.5. Desarrollar en serie de potencias de x la función

$$f(x)=\int_0^x \frac{t\,dt}{(3-t)(t+2)}, \qquad -2<x<3,$$

y determinar el radio y el intervalo de convergencia de la serie.

Ejercicio 9.6. Determinar el dominio de convergencia y la suma de las series:

a) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{4n-1}}{4n}$ b) $\dfrac{x}{1\cdot 2}+\dfrac{x^2}{2\cdot 3}+\dfrac{x^3}{3\cdot 4}+\dfrac{x^4}{4\cdot 5}+\dots$

Ejercicio 9.7. Hallar el dominio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n-1}}{4n-1}$ y probar que su suma es

$$\frac{1}{4}\log\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x.$$

Ejercicio 9.8. Encontrar la única serie de potencias $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ con radio de convergencia no nulo que cumple $f''+f=0$, $f(0)=1$, $f'(0)=0$. Identificar esta función.

Ejercicio 9.9. Hallar el radio y el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{n(3n-1)}$ y sumarla en el intervalo abierto. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(3n-1)}$.

Ejercicio 9.10. Hallar el radio y el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{n(3n+1)}$ y sumarla en el intervalo abierto. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(3n+1)}$.

Ejercicio 9.11. Hallar el intervalo de convergencia de la serie de potencias $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{2^n(n-1)}{n^2+n}x^{n+1}$. Probar que $f(x)=(x-1)\log(1-2x)-2x$ en ese intervalo.